

Tesina di Controllo Digitale

Stefano Tortora - Mario Zullo

Assegnati i filtri analogici caratterizzati dalle seguenti funzioni di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1 + s}{1 + 0.2s}$$

$$I(s) = \frac{1 + 0.2s}{1 + s}$$

Ricavare i filtri digitali corrispondenti ottenuti con i seguenti metodi di discretizzazione:

- Differenze all'indietro;
- Differenze in avanti;
- Trasformazione bilineare (o di Tustin);
- Invarianza della risposta all'impulso;
- Invarianza della risposta al gradino;
- Corrispondenza poli zeri.

Assumendo come pulsazioni di campionamento i valori:

1. $\omega_s = 4 \omega^*$;
2. $\omega_s = 8 \omega^*$;
3. $\omega_s = 20 \omega^*$;

con $\omega^* = 5 \text{ rad/sec}$.

Per ognuno dei filtri corrispondenti calcolati, rappresentare:

- a) risposta armonica (modulo e fase) sui diagrammi di Bode fino alla pulsazione $\omega_s/2$;
- b) il diagramma orario della risposta al gradino unitario;

Commentare i risultati ottenuti confrontando le soluzioni ottenute per i diversi metodi di discretizzazione tre di loro e con le risposte(armonica e indiciale) dei filtri analogici assegnati.

I colori utilizzati nei vari grafici assumono i seguenti significati:

- **Blu:** $G(s) / I(s)$
- **Verde:** $G(z) / I(z)$ con $\omega_s = 20 \text{ rad/sec}$
- **Rosso:** $G(z) / I(z)$ con $\omega_s = 40 \text{ rad/sec}$
- **Celeste:** $G(z) / I(z)$ con $\omega_s = 100 \text{ rad/sec}$

Filtro 1

Analisi del filtro nel continuo

$$G(s) = \frac{1 + s}{1 + 0.2s}$$

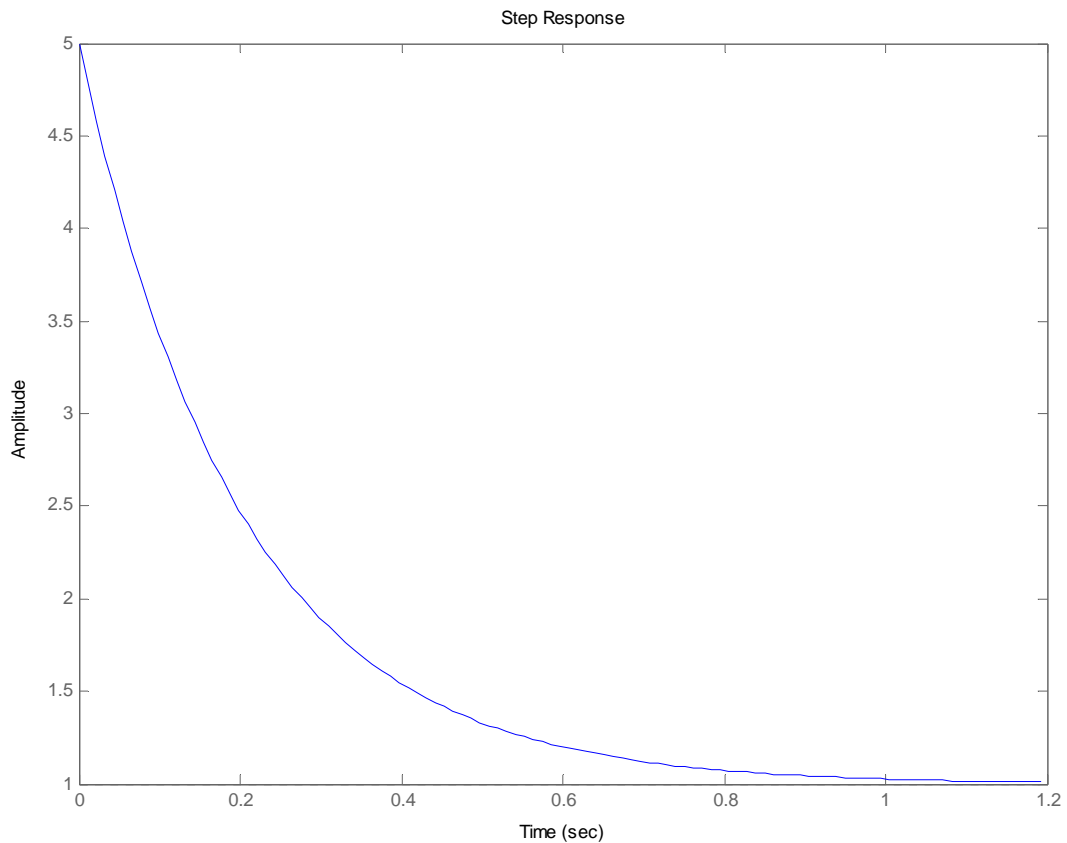


Figura 1: Risposta indiciale

La risposta al gradino unitario ha un **valore finale che tende a uno**. Il sistema quindi è asintoticamente stabile.

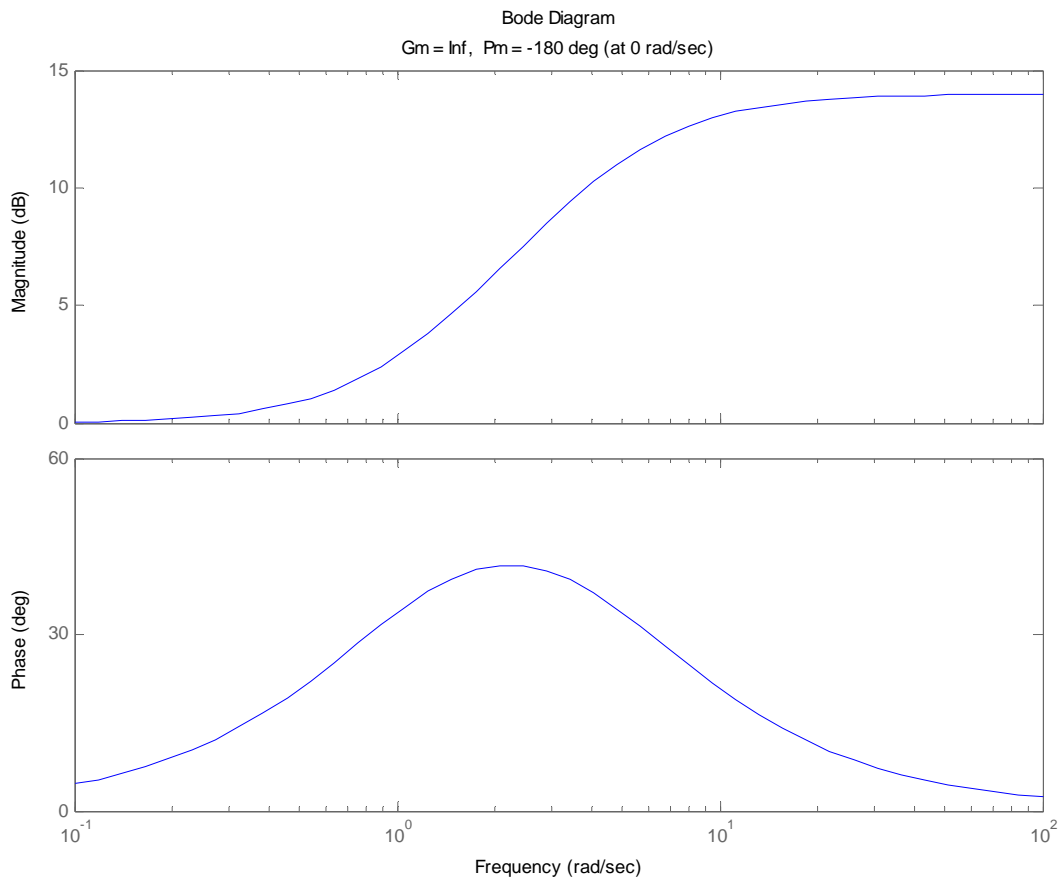


Figura 2: Risposta armonica

Dai diagrammi di Bode della $G(s)$ possiamo notare che il sistema considerato risulta essere una **"rete anticipatrice"**.

Il diagramma dei moduli evidenzia che il sistema non attenua né amplifica il segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω inferiori a 1; per pulsazioni superiori a 1, invece, c'è una amplificazione fino ad un valore massimo pari a 14 db.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi, il filtro opera uno sfasamento limitato sul segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω maggiore di 22.5 (10 gradi) e inferiore a 0.2 (9.04 gradi), mentre per pulsazioni comprese in questo intervallo il sistema introduce uno sfasamento positivo che presenta un valore massimo di 41.7 gradi (frequenza pari a 2.1 rad/sec).

È bene ricordare che questo tipo di filtro viene utilizzato per frequenze comprese tra 0.4 e 1.1 rad/sec dove aumenta abbastanza la fase e di poco il modulo oppure per frequenze maggiori di 7 rad/sec dove aumenta in maniera significativa sia il modulo che la fase.

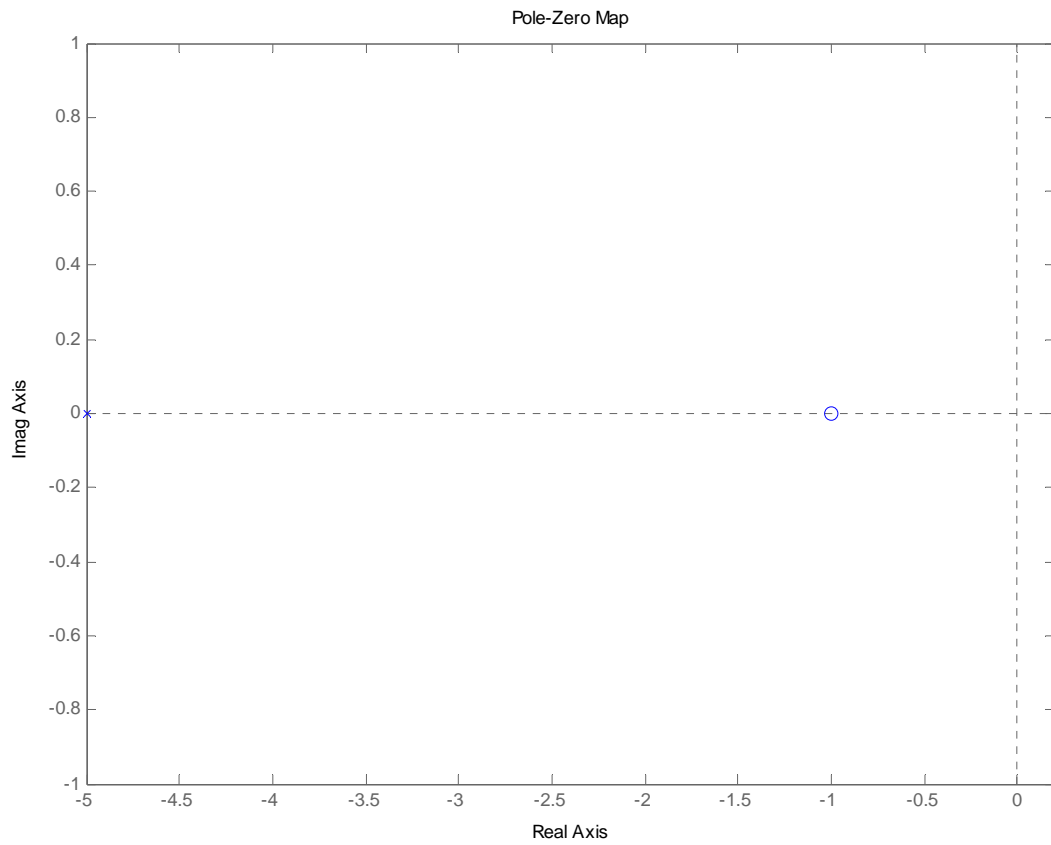


Figura 3: Stabilità

Abbiamo a che fare con un sistema con un polo (non nullo, in -5) ed uno zero (anch'esso non nullo in -1), e ciò ne conferma la stabilità asintotica.

Discretizzazione con il metodo delle differenze all'indietro

Tale metodo utilizza la seguente trasformazione per discretizzare il filtro analogico:

$$D(z) = D(s) \left| s = \frac{z - 1}{Tz} \right.$$

e quindi applicando la trasformazione otteniamo:

$$G(z) = \frac{z(1 + T) - 1}{z(0.2 + T) - 0.2}$$

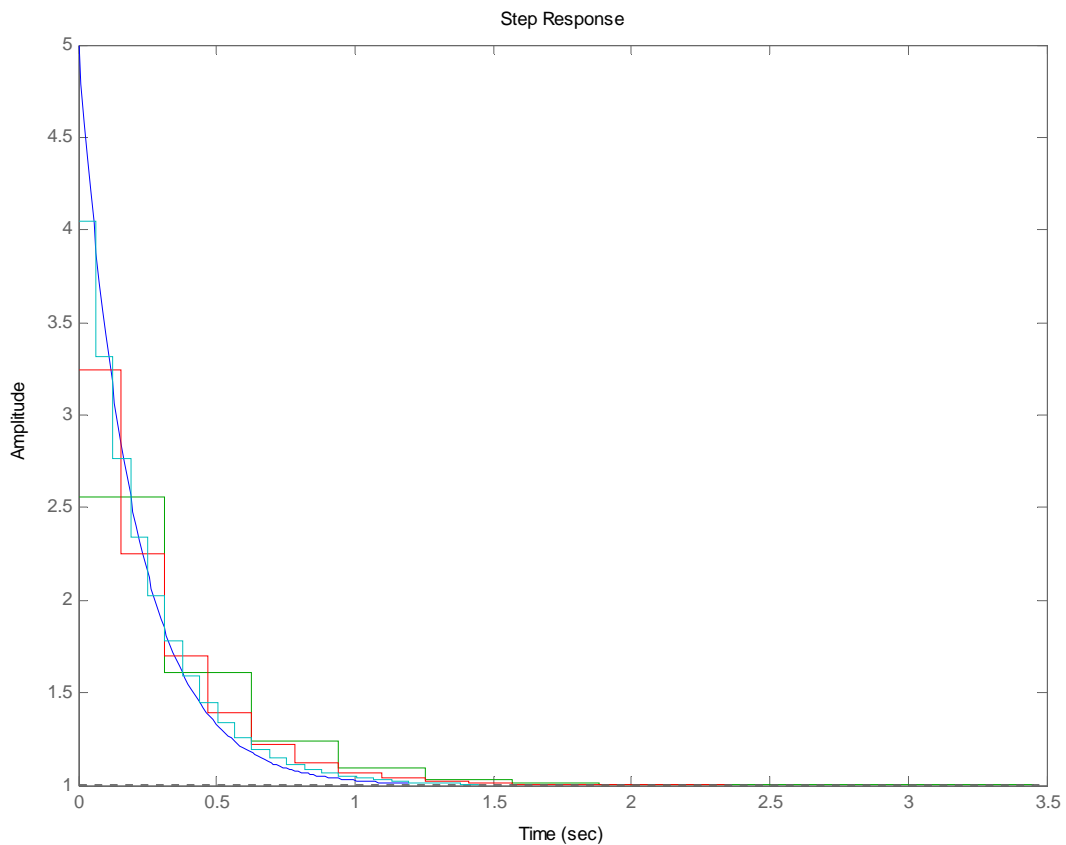


Figura 4: Risposta indiciale - differenze all'indietro

Questo tipo di discretizzazione approssima abbastanza bene la risposta indiciale della $G(s)$; all'aumentare delle pulsazioni di campionamento (il celeste rappresenta le più alte) migliora l'approssimazione del filtro.

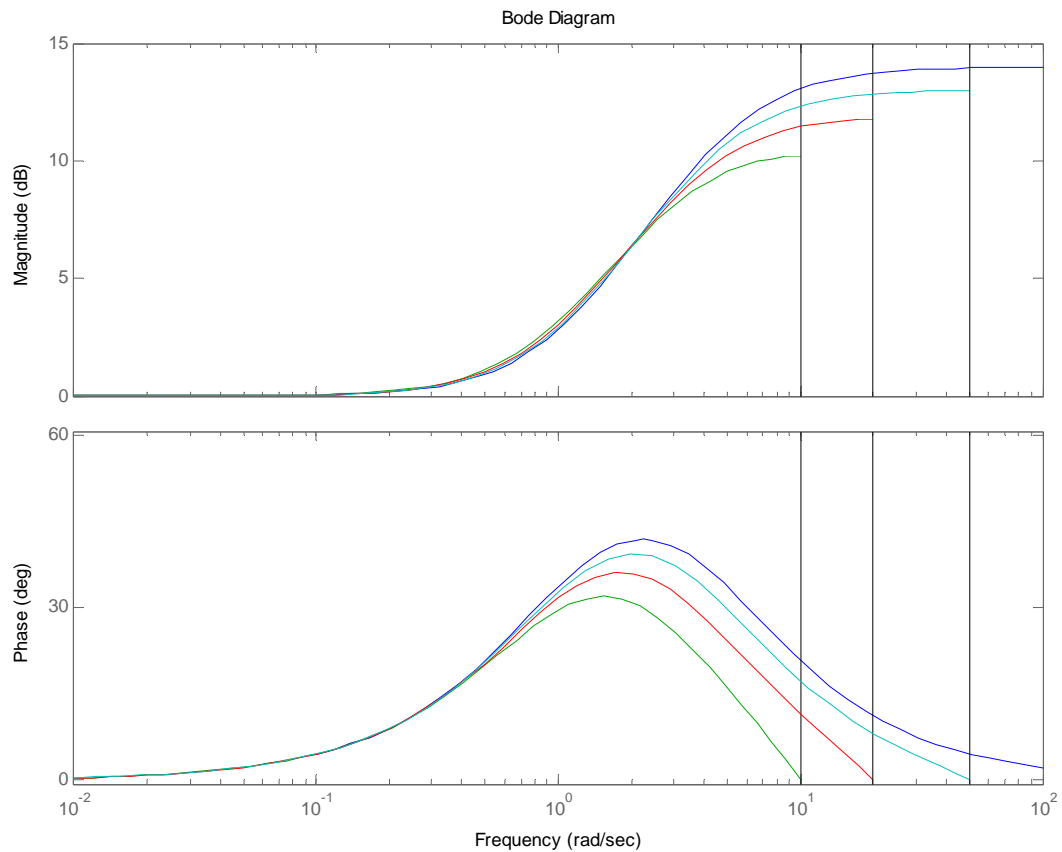


Figura 5: Risposta armonica - differenze all'indietro

Per quanto riguarda il diagramma dei moduli possiamo osservare che fino ad una frequenza di 2.5 rad/sec le tre approssimazioni si comportano nel medesimo modo della $G(s)$; per frequenze superiori invece all'aumentare delle pulsazioni migliora l'approssimazione.

Per le fasi può essere fatto un discorso analogo considerando che il punto di svolta è rappresentato da una frequenza pari a 0.7 rad/sec.

Possiamo notare che discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di sfasamento massimo:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $G(s)$
$G(s)$	41.7	2.25	0
20 rad/sec	31.9	1.50	9.8
40 rad/sec	36.1	1.73	5.6
100 rad/sec	39.2	1.94	2.5

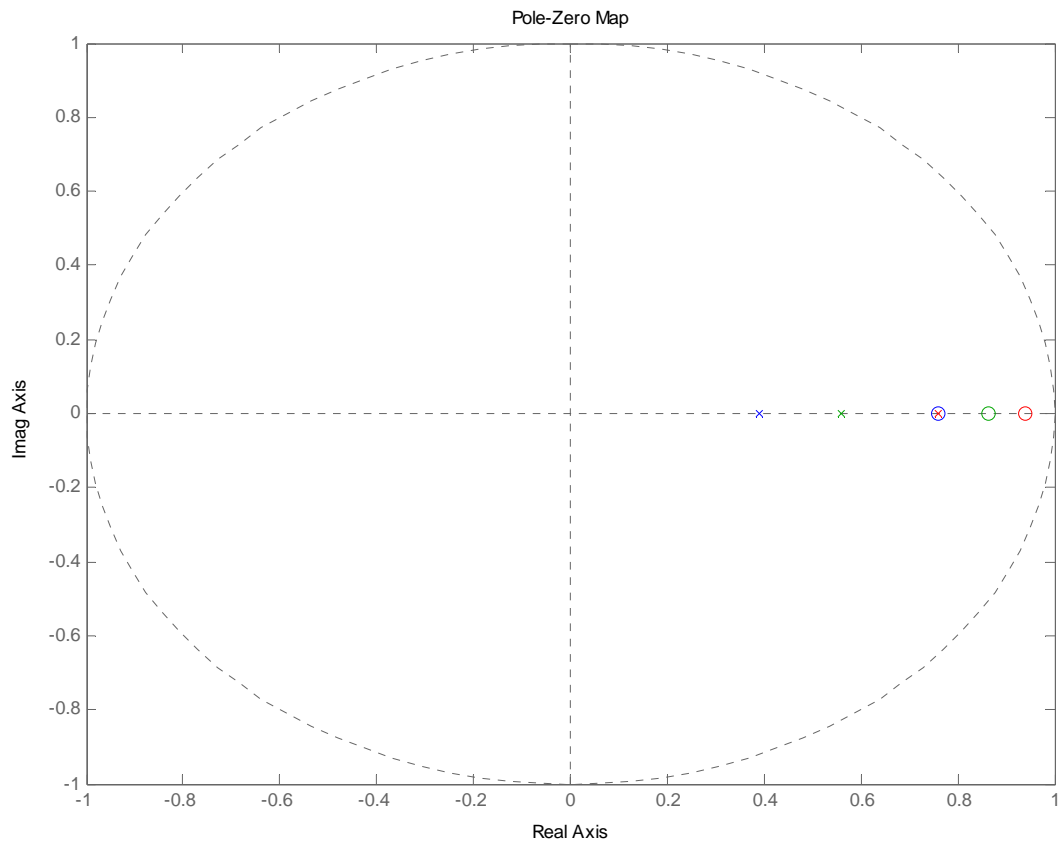


Figura 6: Stabilità - differenze all'indietro

Discretizzando con questo metodo **il filtro risulta essere stabile** poiché i poli stabili in s (quelli nel semipiano negativo) vengono mappati in poli stabili in z (compresi nella circonferenza di raggio unitario e centrata nell'origine); in particolare con tale discretizzazione sono mappati all'interno della circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e centrata in $(0, \frac{1}{2})$.

Discretizzazione con il metodo delle differenze in avanti

Tale metodo utilizza la seguente trasformazione per discretizzare il filtro analogico:

$$D(z) = D(s) \quad \left| \quad s = \frac{z - 1}{T} \right.$$

e quindi applicando la trasformazione otteniamo:

$$G(z) = \frac{z + T - 1}{0.2z + T - 0.2}$$

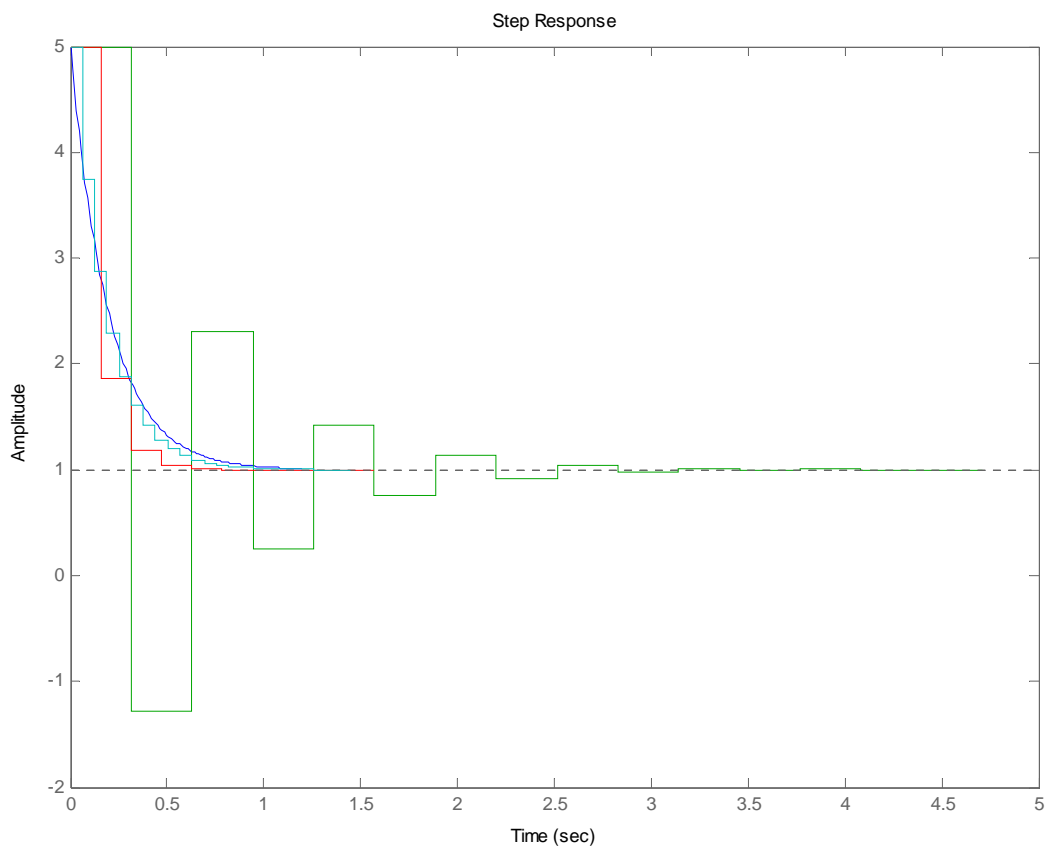


Figura 7: Risposta indiciale - differenze in avanti

Si può subito notare che per pulsazioni di campionamento basse (rappresentate con il verde) nel transitorio la funzione non segue l'andamento originale, in particolare presenta un andamento oscillatorio. Tale andamento è dovuto alla presenza di un polo negativo (in -0.571). All'aumentare delle pulsazioni l'approssimazione migliora, anche se non risulta essere buona come quella ottenuta discretizzando con il metodo delle differenze all'indietro.

Si nota come invece a regime in ogni caso la funzione originale e quelle discretizzare tendono allo stesso valore.

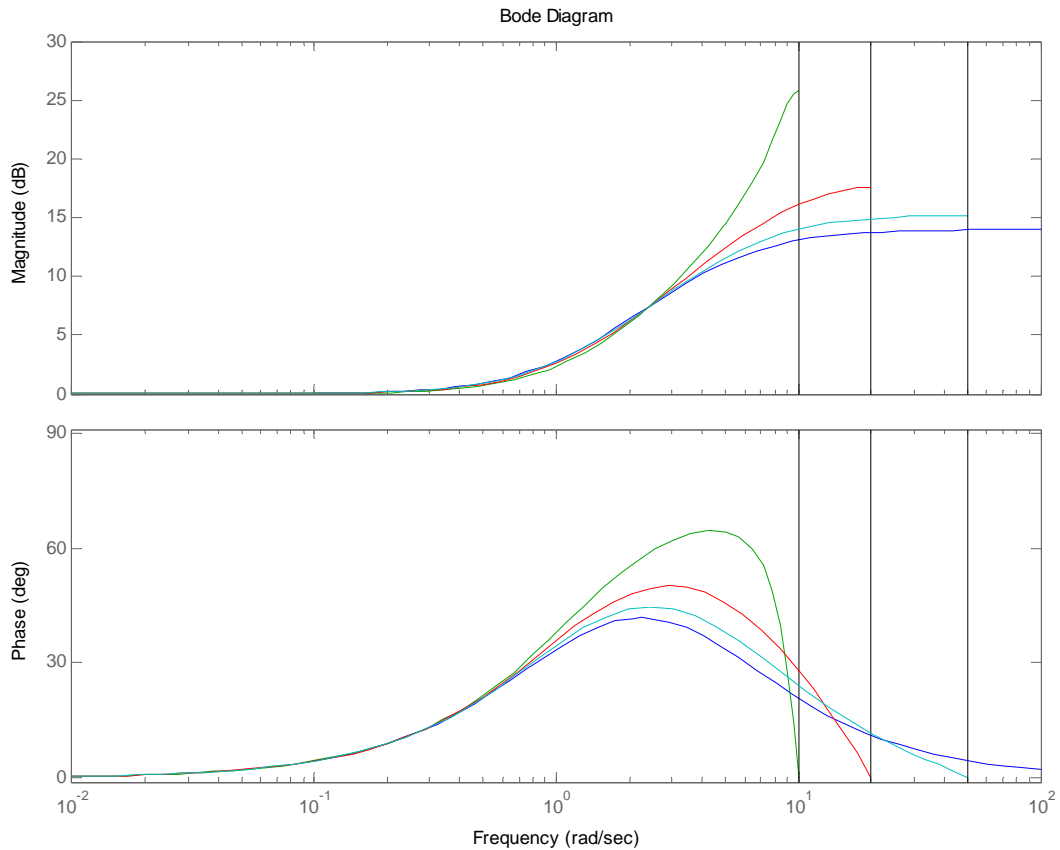


Figura 8: Risposta armonica - differenze in avanti

Per quanto riguarda il diagramma dei moduli possiamo osservare che fino ad una frequenza di 3.0 rad/sec le tre approssimazioni si comportano nel medesimo modo della $G(s)$; per frequenze superiori invece all'aumentare delle pulsazioni migliora l'approssimazione e in particolare possiamo osservare che per pulsazioni pari a 20 rad/sec (colore verde) il discostamento risulta essere più accentuato.

Per le fasi può essere fatto un discorso analogo considerando che il punto di svolta è rappresentato da una frequenza pari a 0.7 rad/sec.

Discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di sfasamento massimo:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $G(s)$
$G(s)$	41.7	2.25	0
20 rad/sec	64.5	4.29	-22.8
40 rad/sec	59.1	2.91	-17.4
100 rad/sec	44.7	2.51	-3.0

Come sopra detto possiamo notare come con pulsazioni più basse la differenza tra gli sfasamenti massimi è notevole (intorno ai 20 gradi)

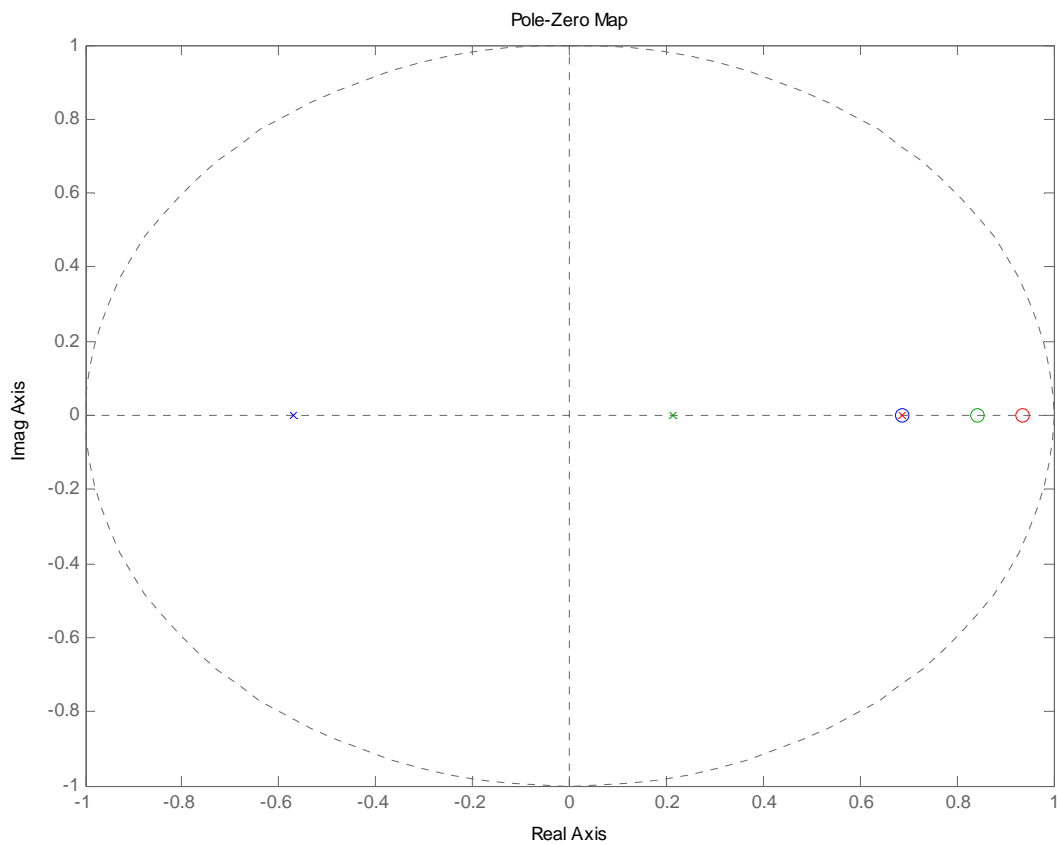


Figura 9: Stabilità - differenze in avanti

Sebbene in pratica questo metodo di discretizzazione non venga utilizzato nel controllo digitale perché può non conservare la stabilità del sistema (il semipiano negativo in s viene mappato in z nel semipiano compreso tra $]-\infty, 1]$), nel nostro caso come si può osservare dalla figura la stabilità è mantenuta (i poli sono interni al cerchio di raggio unitario e centrato nell'origine). Quindi anche in questo caso **il filtro risulta essere stabile**.

Discretizzazione con il metodo della trasformazione bilineare

Tale metodo utilizza la seguente trasformazione per discretizzare il filtro analogico:

$$D(z) = D(s) \quad \left| \quad s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right.$$

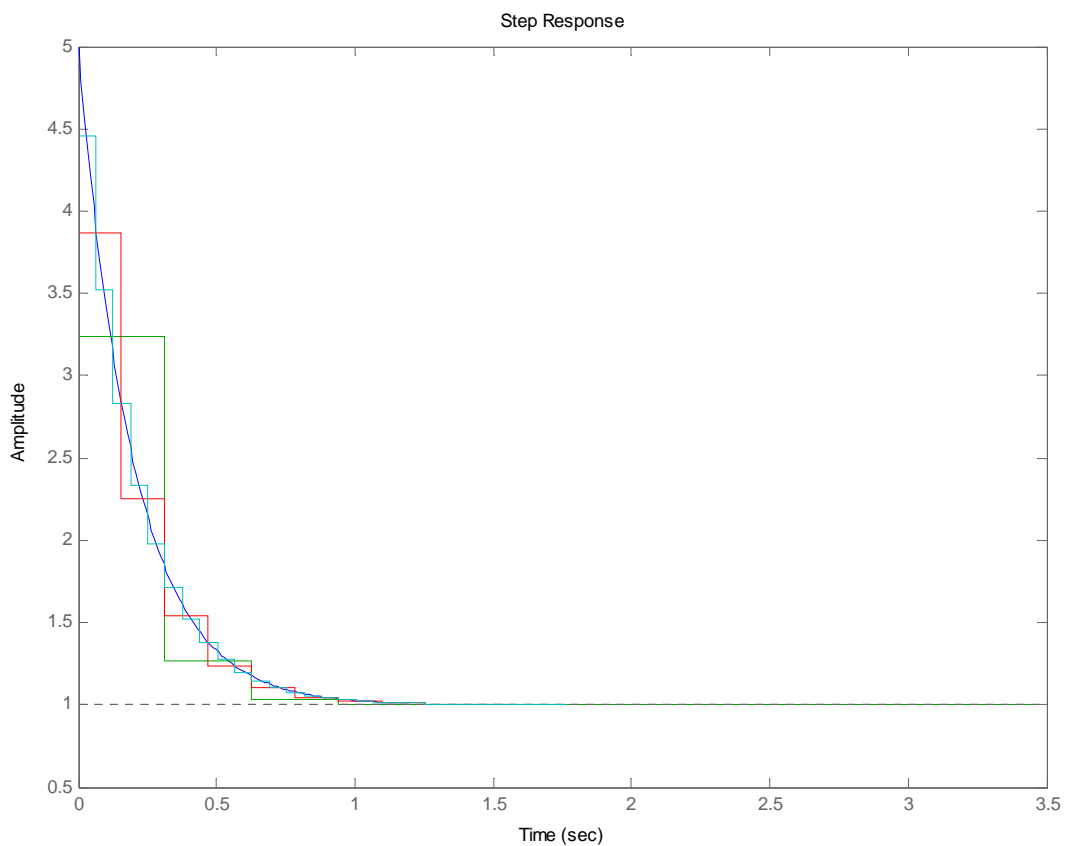


Figura 10: Risposta indiciale – trasformazione bilineare

Questo tipo di discretizzazione approssima bene la risposta indiciale della $G(s)$; all'aumentare delle pulsazioni di campionamento (il celeste rappresenta le più alte) migliora l'approssimazione del filtro.

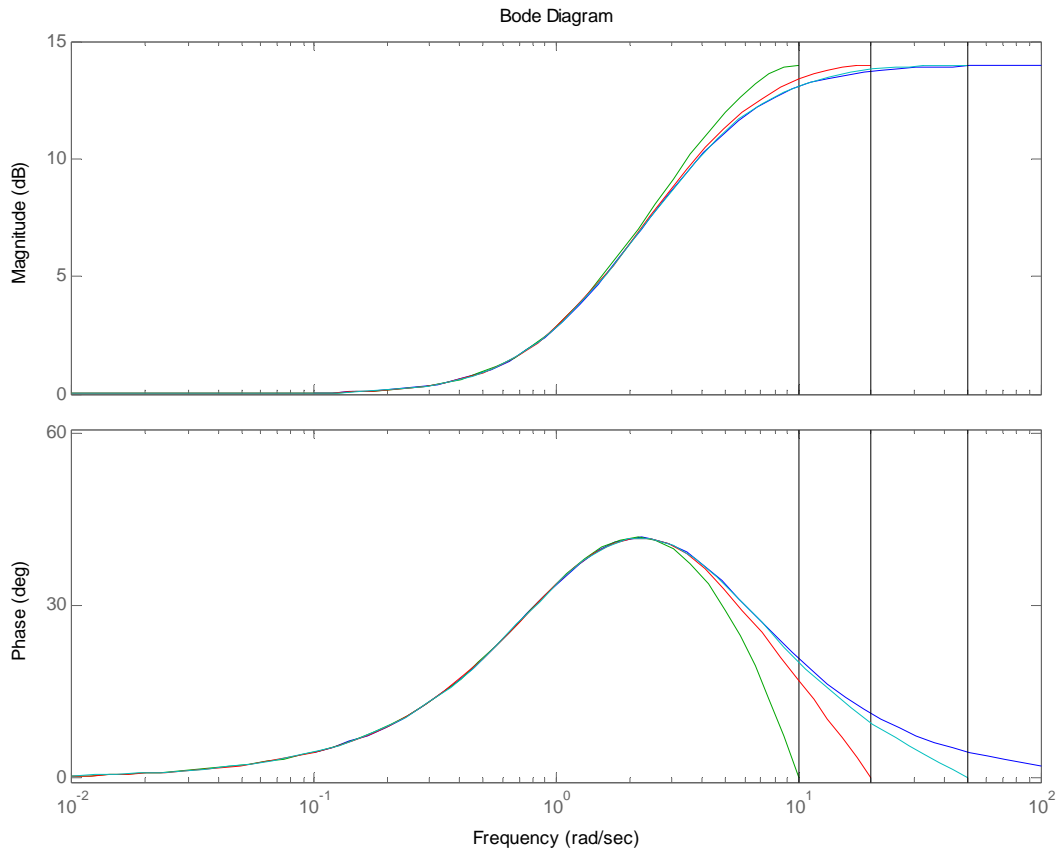


Figura 11: Risposta armonica – trasformazione bilineare

Si può subito notare dalla figura che attraverso tale metodo sia il modulo che la fase della risposta armonica sono praticamente identiche alla $G(s)$, e l'approssimazione peggiora di poco con il diminuire delle pulsazioni di campionamento.

Discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di sfasamento massimo:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $G(s)$
$G(s)$	41.7	2.25	0
20 rad/sec	41.7	2.25	0
40 rad/sec	41.7	2.25	0
100 rad/sec	41.7	2.25	0

Come sopra detto possiamo notare come gli sfasamenti massimi della funzione analogica e di quelle discretizzate siano identici, a conferma della “bontà” di tale tipo di discretizzazione.

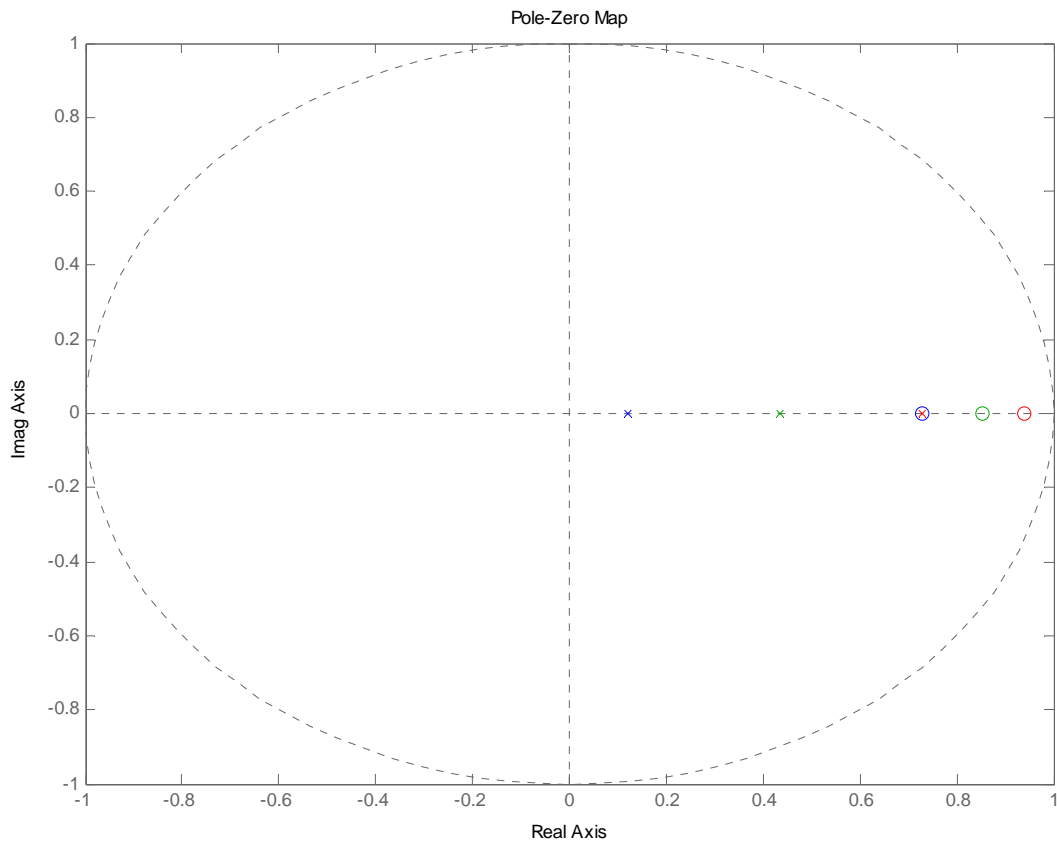


Figura 12: Stabilità – trasformazione bilineare

Discretizzando con questo metodo **il filtro risulta essere stabile** poiché i poli stabili in s (quelli nel semipiano negativo) vengono esattamente mappati in poli stabili in z (compresi nella circonferenza di raggio unitario e centrata nell'origine).

Discretizzazione con il metodo dell'invarianza all'impulso

Questo metodo di discretizzazione prevede che l'antitrasformata di Laplace della $G(s)$ calcolata per $t=KT$ sia uguale all'antitrasformata Z della $G(z)$ da cui:

$$D(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[D(s)]]$$

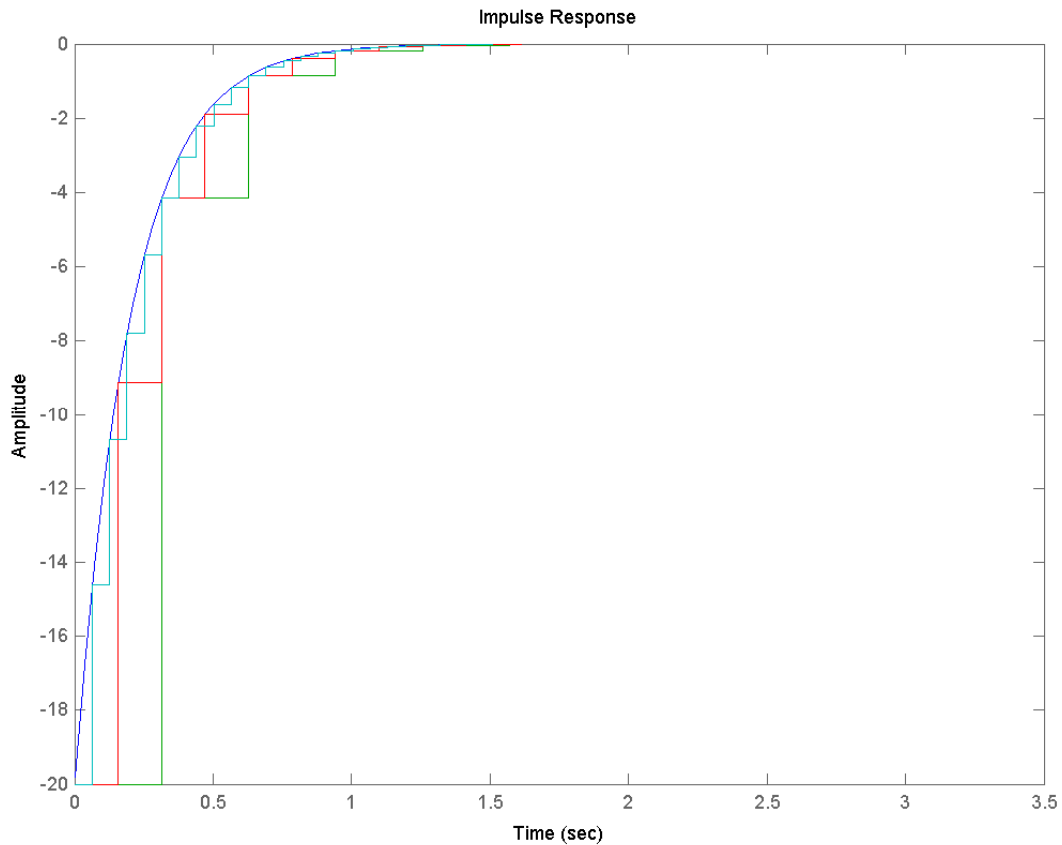


Figura 13: Risposta all'impulso – invarianza all'impulso

Poiché lo scopo di questo metodo di discretizzazione è quello di approssimare la risposta all'impulso del sistema si può subito notare che effettivamente i filtri discretizzati seguono l'andamento di quello analogico. All'aumentare delle pulsazioni di campionamento migliora l'approssimazione del filtro.

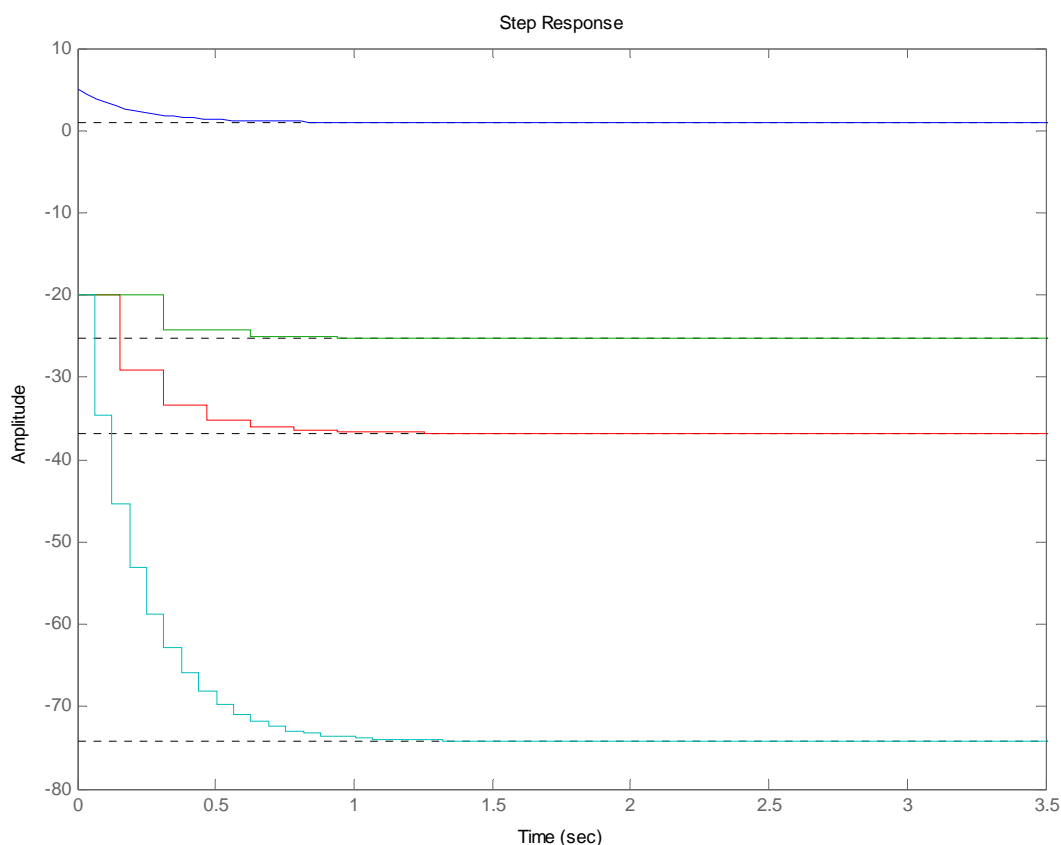


Figura 14: Risposta indiciale – invarianza all'impulso

Per quanto riguarda invece le risposte dei filtri con in ingresso un gradino si evince a prima vista il discostamento dalla risposta del filtro analogico. La motivazione deriva dal fatto che tale metodo è stato studiato per approssimare le risposte agli impulsi e quindi risulta ovvio che per ingressi diversi il comportamento non seguirà quello previsto.

Discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di assestamento a regime:

Valore delle pulsazioni	Assestamento a regime	Differenze di assestamento a regime con la G(s)
G(s)	1	0
20 rad/sec	-25	-24
40 rad/sec	-37	-36
100 rad/sec	-74	-73

All'aumentare delle pulsazioni di campionamento l'andamento della G(z) si discosta sempre di più da quello della G(s).

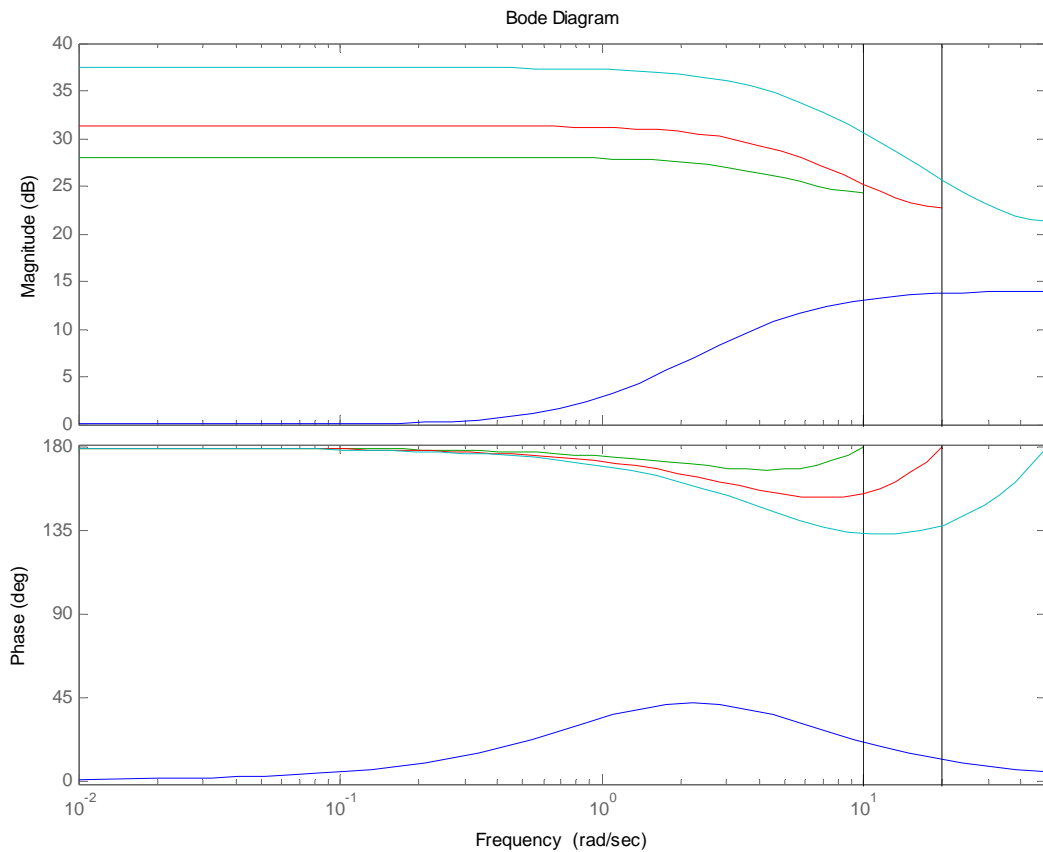


Figura 15: Risposta armonica – invarianza all'impulso

In questo diagramma si nota come i sistemi discretizzati si comportino in maniera totalmente diversa dal filtro analogico. Non ha senso quindi effettuare le solite analisi.

È subito visibile la presenza di aliasing che causa la cattiva approssimazione della rete. La causa della presenza di aliasing è dovuta al fatto che la $G(s)$ non è limitata in banda. Questo comporta anche che all'aumentare delle frequenze di campionamento l'approssimazione peggiora leggermente.

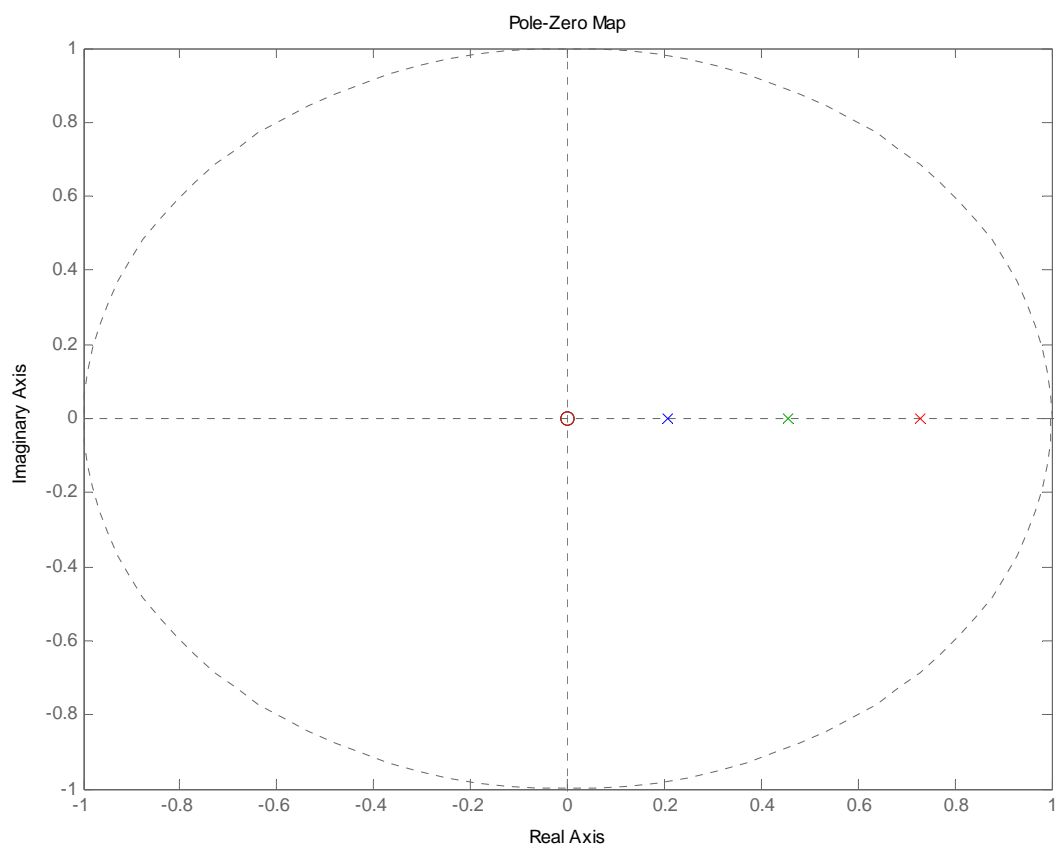


Figura 16: Stabilità – invarianza all'impulso

Come noto dalla teoria, questo tipo di discretizzazione mappa sistemi stabili in s in sistemi stabili in z .

Discretizzazione con il metodo dell'invarianza al gradino

Questo metodo di discretizzazione prevede che l'antitrasformata di Laplace della risposta al gradino della $G(s)$ calcolata per $t=KT$ sia uguale all'antitrasformata Z della risposta al gradino delle $G(z)$ da cui:

$$D(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} D(s) \right]$$

Questa relazione mette in evidenza che per ottenere la $G(z)$ si deve effettuare la Z-trasformata della $G(s)$ in cascata ad un ricostruttore di ordine 0.

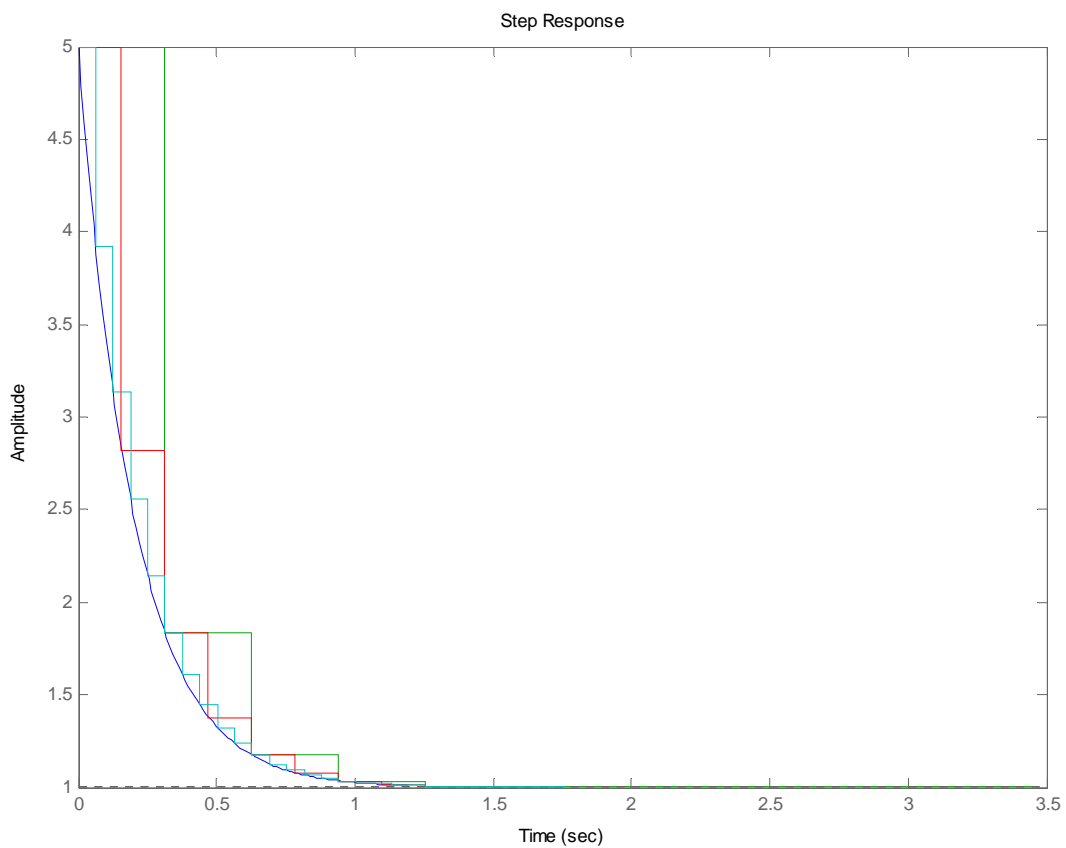


Figura 17: Risposta indiciale - invarianza al gradino

Le risposte al gradino dei filtri discreti risultano approssimare abbastanza fedelmente l'andamento della $G(s)$, anche perché l'obiettivo di tale metodo di discretizzazione risulta essere proprio questo. Si nota come all'aumentare delle frequenze migliora l'approssimazione.

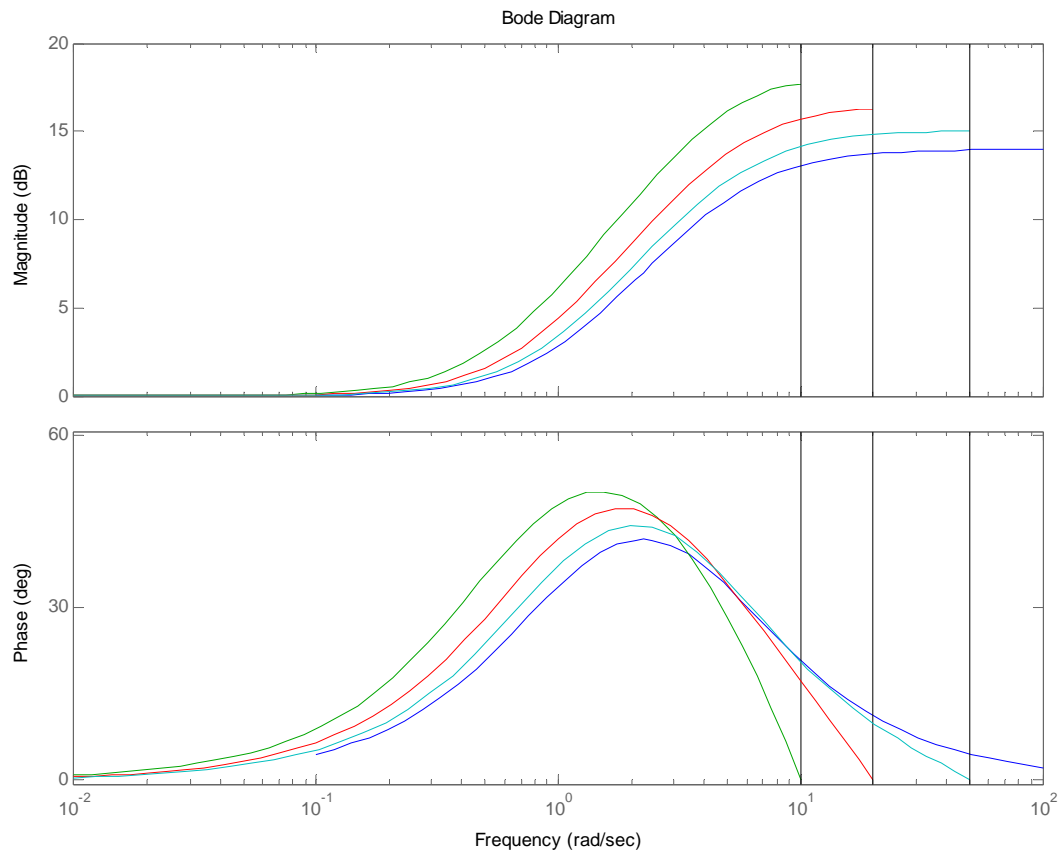


Figura 18: Risposta armonica - invarianza al gradino

A differenza del metodo precedente non si riscontrano problemi di aliasing in quanto la presenza del ricostruttore fittizio di ordine zero introduce un effetto di filtraggio.

Per quanto riguarda il diagramma dei moduli possiamo osservare che all'aumentare delle frequenze migliora l'approssimazione del modulo della risposta armonica; per le fasi può essere fatto un discorso analogo.

Discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di sfasamento massimo:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $G(s)$
$G(s)$	41.7	2.25	0
20 rad/sec	50.1	1.57	-8.4
40 rad/sec	47	1.9	-6.7
100 rad/sec	44.2	2.0	-2.5

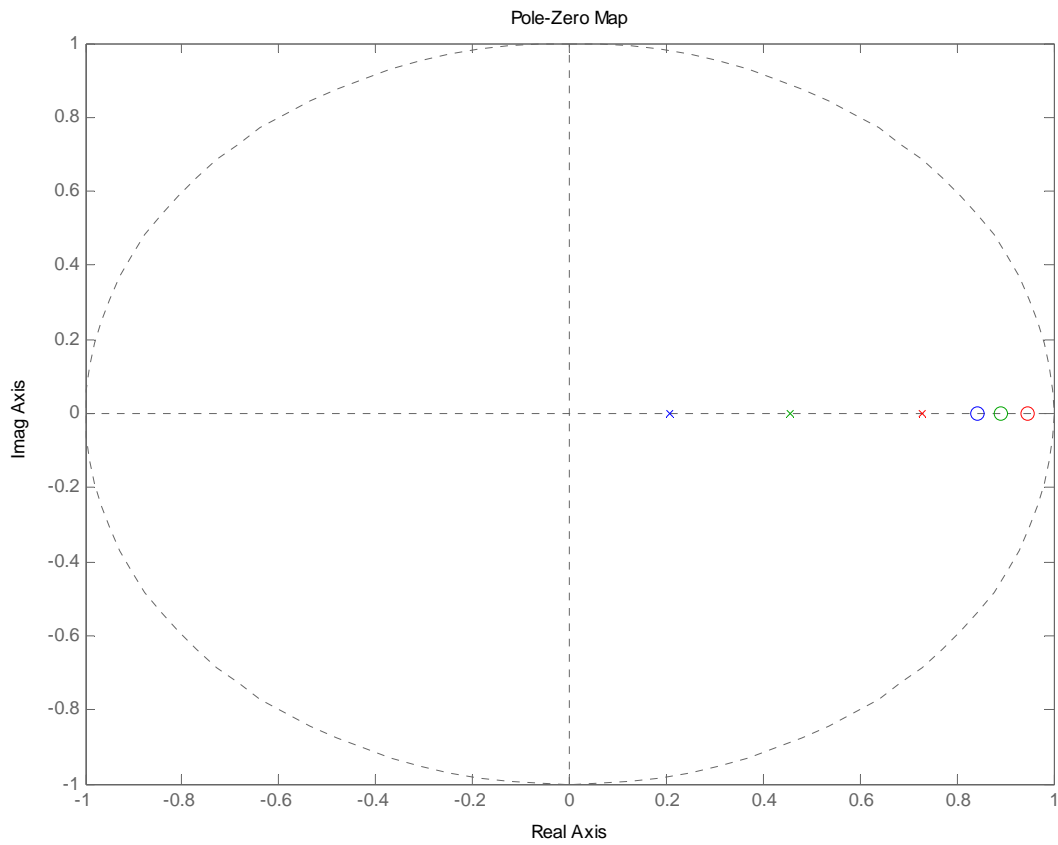


Figura 19: Stabilità - invarianza al gradino

Come noto dalla teoria, questo tipo di discretizzazione mappa sistemi stabili in s in sistemi stabili in z .

Discretizzazione con il metodo della corrispondenza poli-zeri

Con questo metodo, ogni polo e zero in s della $G(s)$ viene trasformato in un polo o zero in z mediante le relazioni:

$$(s + a) \rightarrow (1 - e^{-aT} z^{-1})$$

$$(s + a \pm jb) \rightarrow (1 - 2e^{-aT} \cos bT z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2})$$

Dopo l'applicazione di queste relazioni, vengono introdotti nella $G(z)$ tanti zeri in $z=-1$ quanti sono i poli di $G(s)$ in eccesso rispetto agli zeri, meno uno (convenzione utilizzata da Matlab).

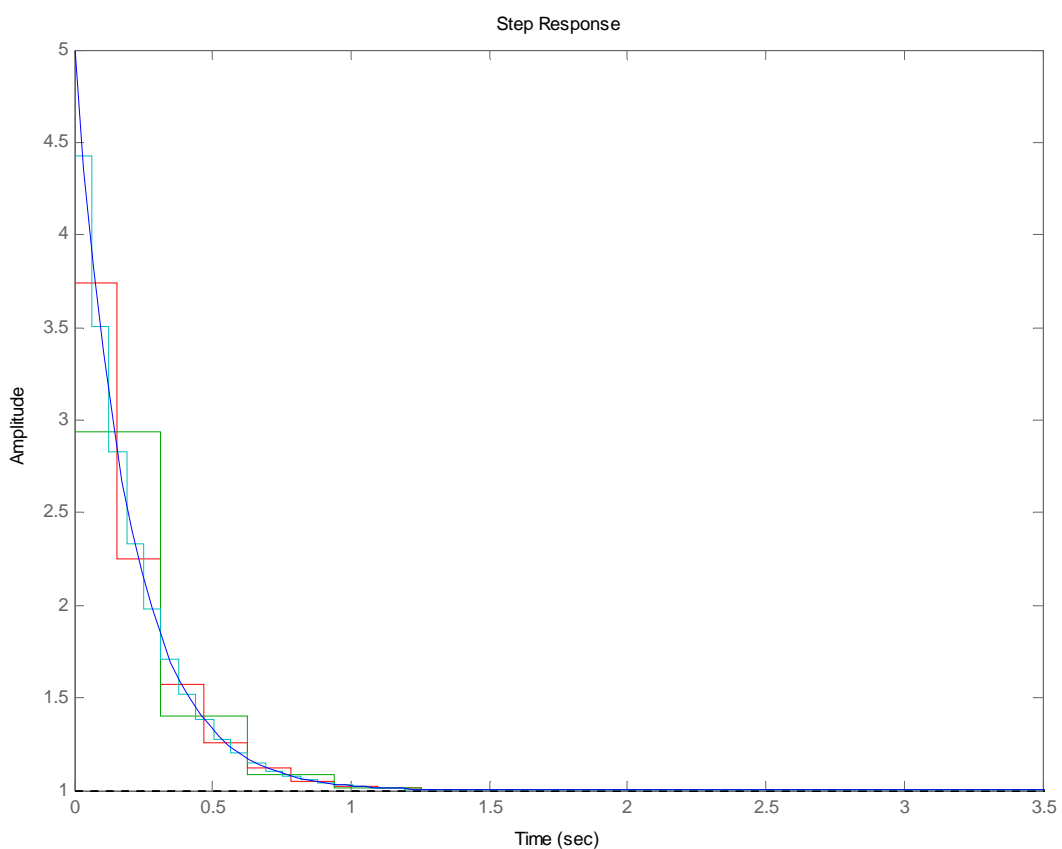


Figura 20: Risposta indiciale - corrispondenza poli-zeri

Questo tipo di discretizzazione approssima bene la risposta indiciale della $G(s)$; all'aumentare delle pulsazioni di campionamento (il celeste rappresenta le più alte) migliora l'approssimazione del filtro.

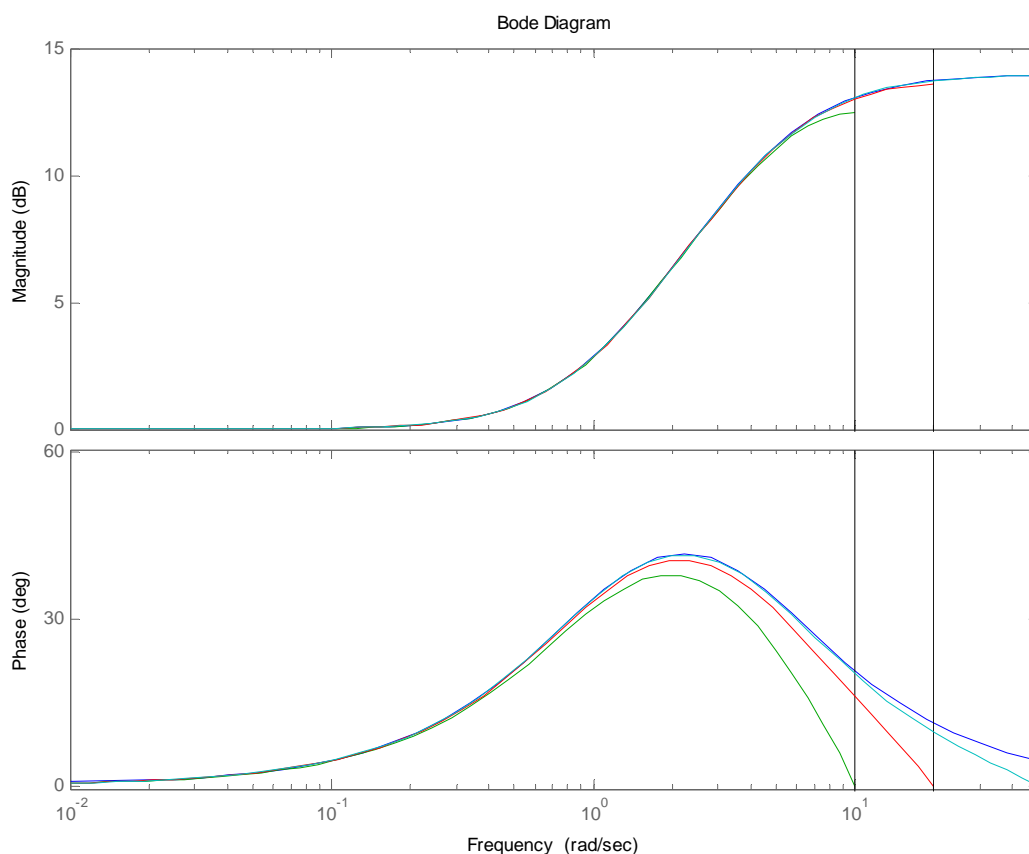


Figura 21: Risposta armonica - corrispondenza poli-zeri

Si può subito notare dalla figura che attraverso tale metodo sia il modulo è praticamente identico a quello della $G(s)$.

Per le fasi la differenza è minima ma comunque esistente:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $G(s)$
$G(s)$	41.7	2.25	0
20 rad/sec	37.9	2.0	3.8
40 rad/sec	40.7	2.22	1
100 rad/sec	41.5	2.25	0.2

Come sopra detto possiamo notare come gli sfasamenti massimi della funzione analogica e di quelle discretizzate siano molto simili, a conferma della “bontà” di tale tipo di discretizzazione.

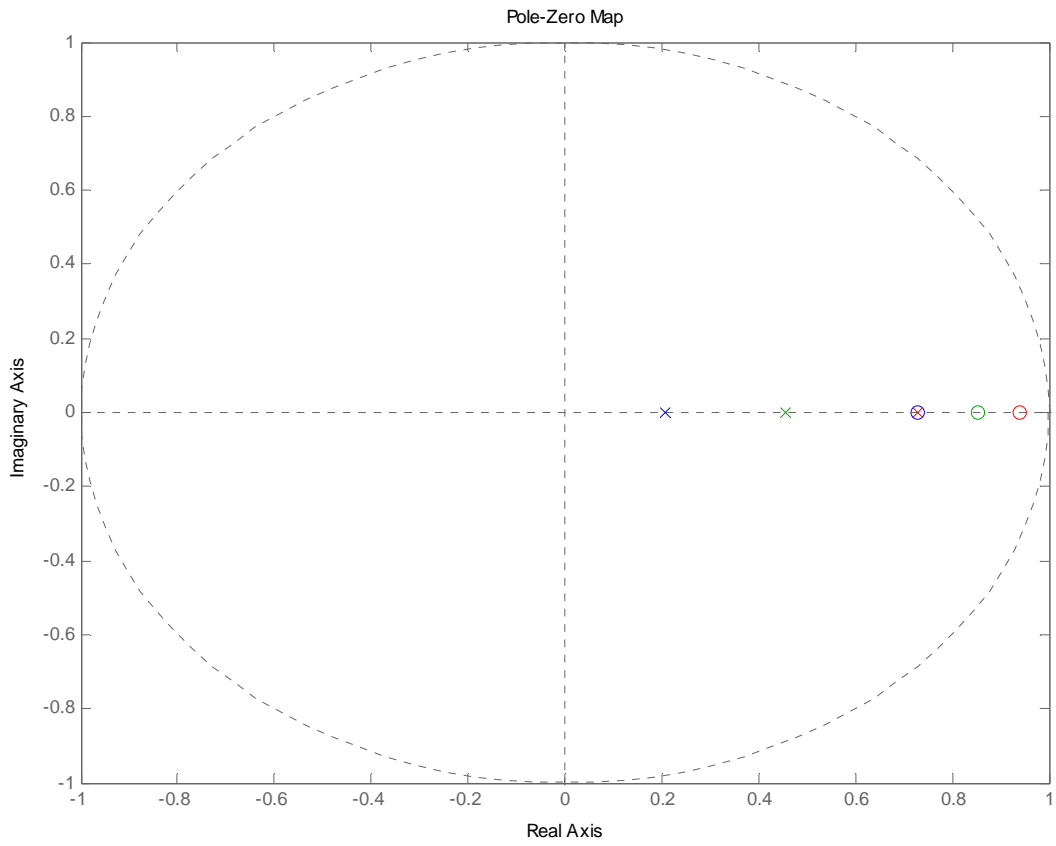


Figura 22: Stabilità - corrispondenza poli-zeri

Questo tipo di discretizzazione trasforma sistemi stabili in s in sistemi stabili in z .

Conclusioni

Alla luce dei risultati ottenuti abbiamo messo a confronto i due metodi di discretizzazione che approssimano meglio il filtro analogico:

- **Blu:** $G(s)$
- **Verde:** $G(z)$ con Tustin e $\omega_s = 100$ rad/sec
- **Rosso:** $G(z)$ con Corrispondenza Poli-Zeri e $\omega_s = 100$ rad/sec

I due metodi approssimano la $G(s)$ in maniera praticamente identica tra loro e a conferma di quanto noto dalla teoria sono effettivamente quelli migliori e quindi i più utilizzati nella pratica.

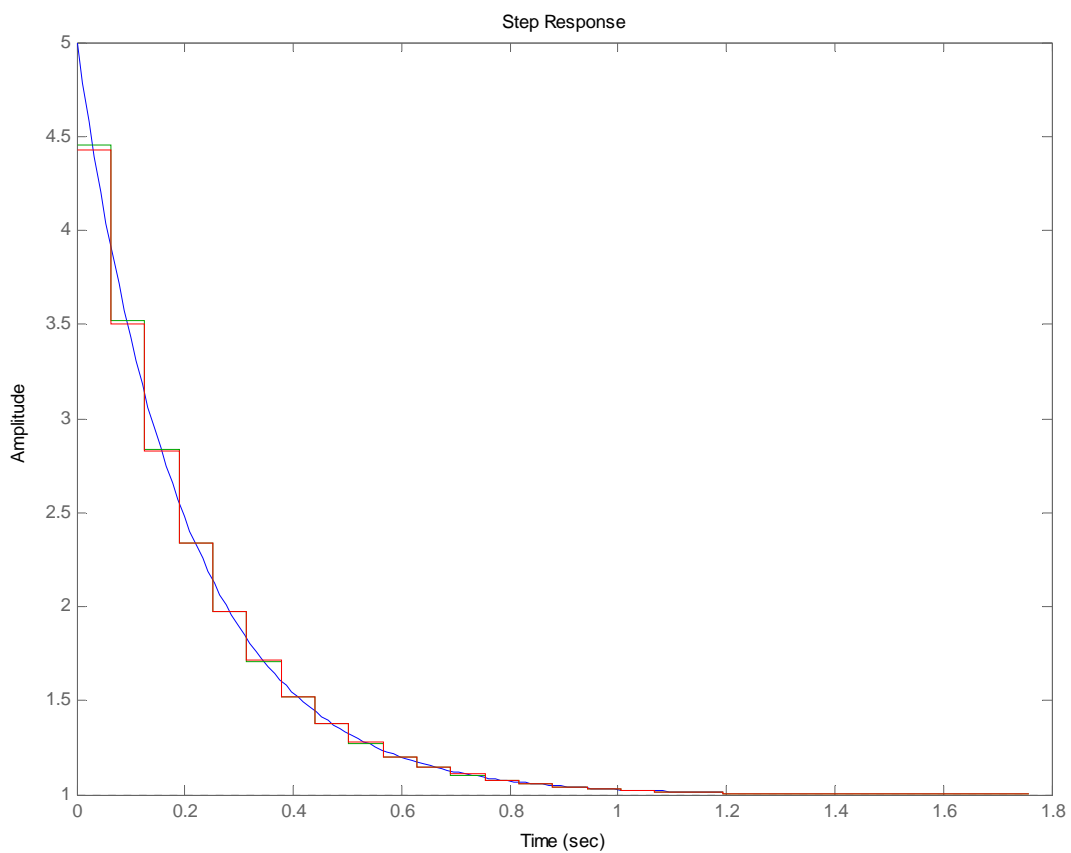


Figura 23: Conclusioni - risposta indiciale

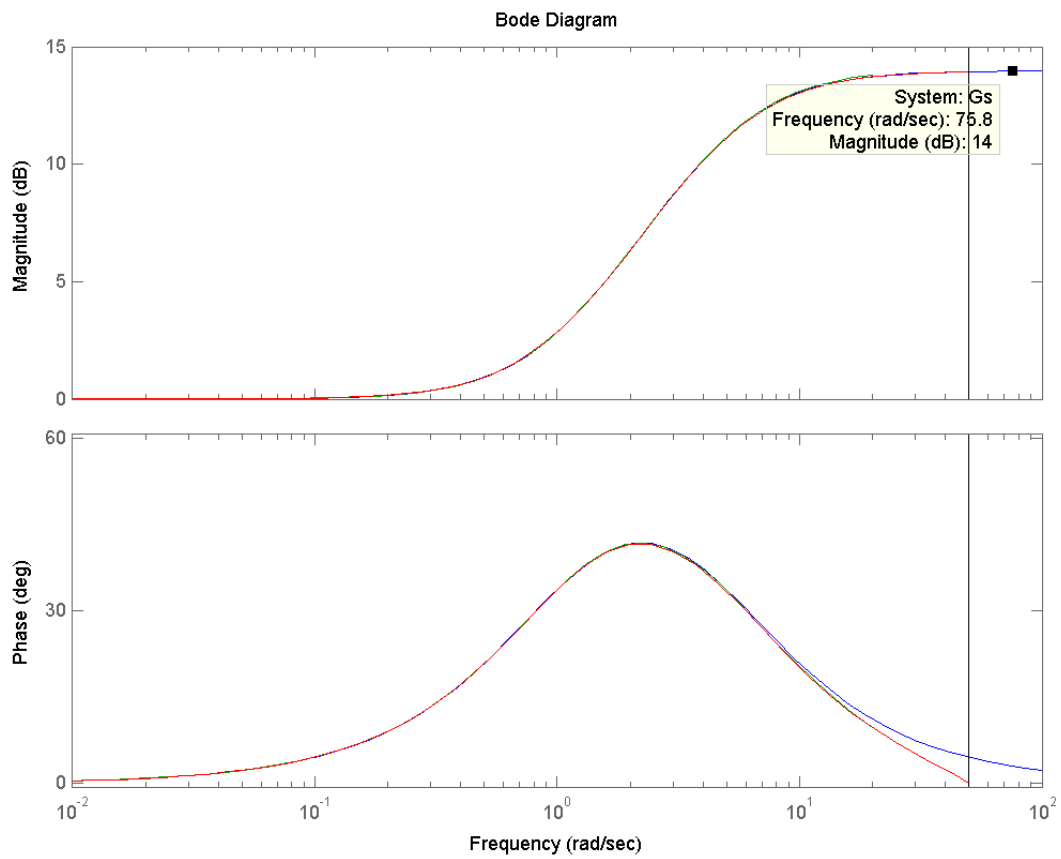


Figura 24: Conclusioni – risposta armonica

Anche per i diagrammi di bode, sia per il modulo che per la frequenza valgono le stesse considerazioni.

Filtro 2

Analisi del filtro nel continuo

$$I(s) = \frac{1 + 0.2s}{1 + s}$$

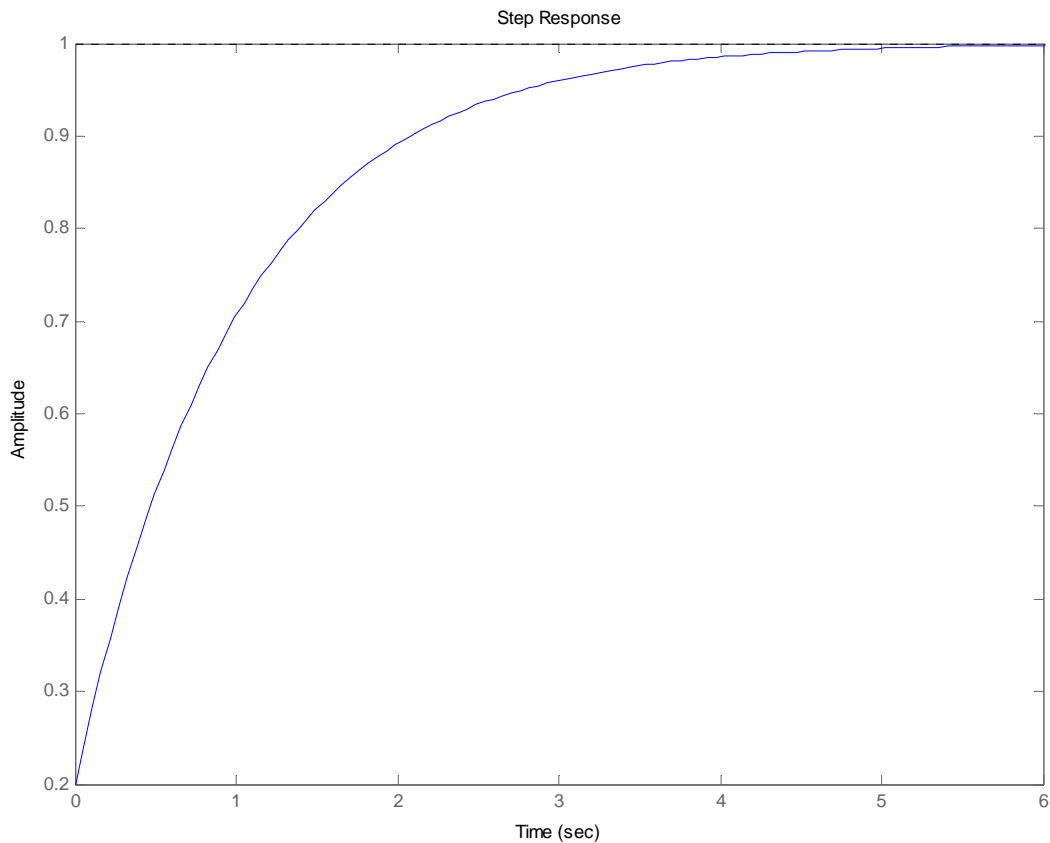


Figura 25: Risposta indiciale

La risposta al gradino unitario ha un **valore finale che tende a uno**. Il sistema quindi è asintoticamente stabile.

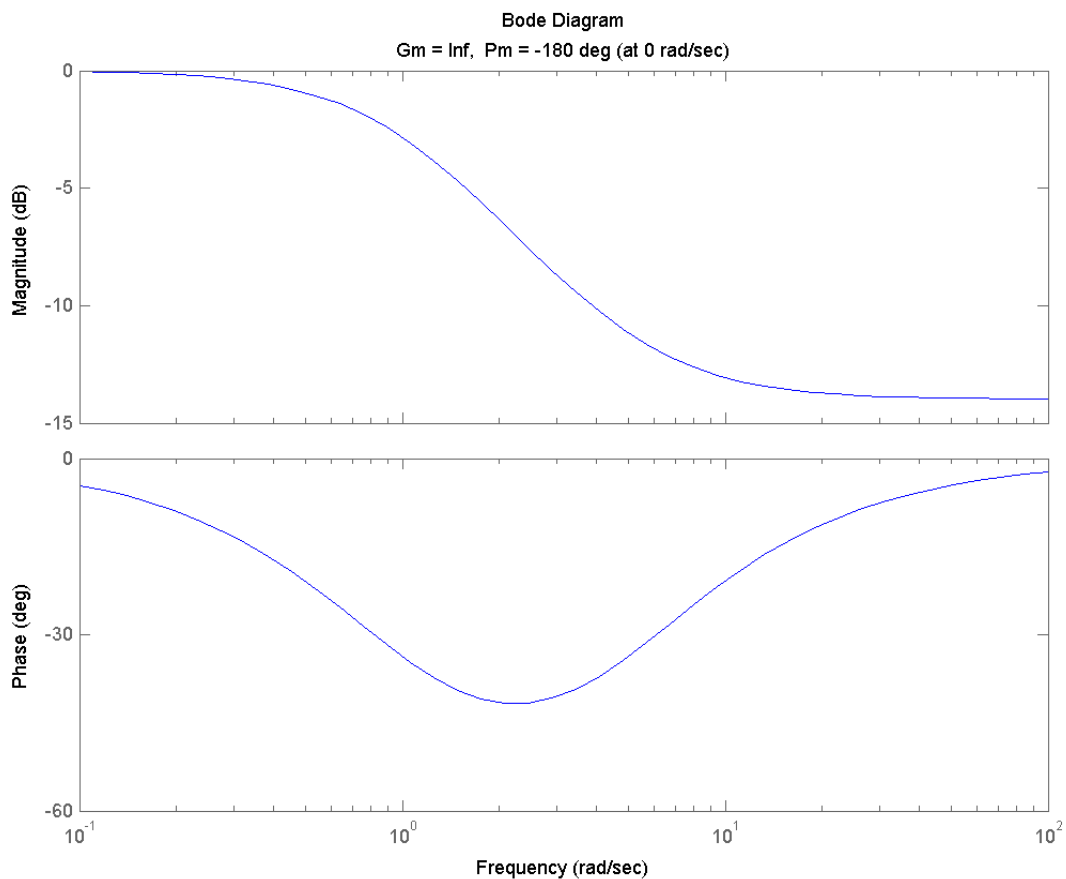


Figura 26: Risposta armonica

Dai diagrammi di Bode della $I(s)$ possiamo notare che il sistema considerato risulta essere una **"rete ritardatrice"**.

Il diagramma dei moduli evidenzia che il sistema attenua moderatamente il segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω inferiori a 1; per pulsazioni superiori a 1, invece, c'è una attenuazione fino ad un valore massimo pari a 14 db.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi, il filtro opera uno sfasamento limitato sul segnale in ingresso finché esso ha pulsazione ω maggiore di 22 (10 gradi) e inferiore a 0.2 (10 gradi), mentre per pulsazioni comprese in questo intervallo il sistema introduce uno sfasamento negativo che presenta un valore massimo di 41.7 gradi (frequenza pari a 2.1 rad/sec).

È bene ricordare che questo tipo di filtro viene utilizzato per frequenze maggiori di 10 rad/sec ossia dove riduce il modulo e lascia quasi invariata la fase.

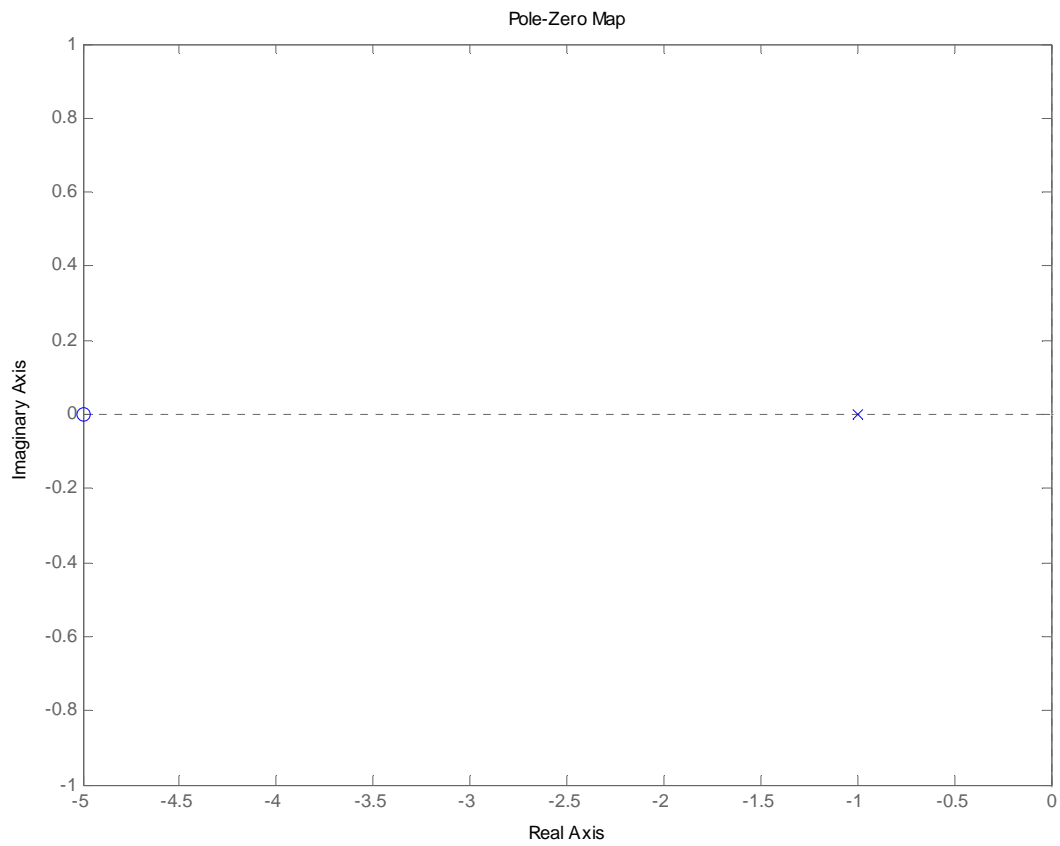


Figura 27: Stabilità

Abbiamo a che fare con un sistema con un polo (non nullo, in -1) ed uno zero (anch'esso non nullo in -5), e ciò ne conferma la stabilità asintotica.

Discretizzazione con il metodo delle differenze all'indietro

Tale metodo utilizza la seguente trasformazione per discretizzare il filtro analogico:

$$D(z) = D(s) \left| \begin{array}{l} s = \frac{z - 1}{Tz} \end{array} \right.$$

e quindi applicando la trasformazione otteniamo:

$$I(z) = \frac{z(T + 0.2) - 0.2}{z(T + 1) - 1}$$

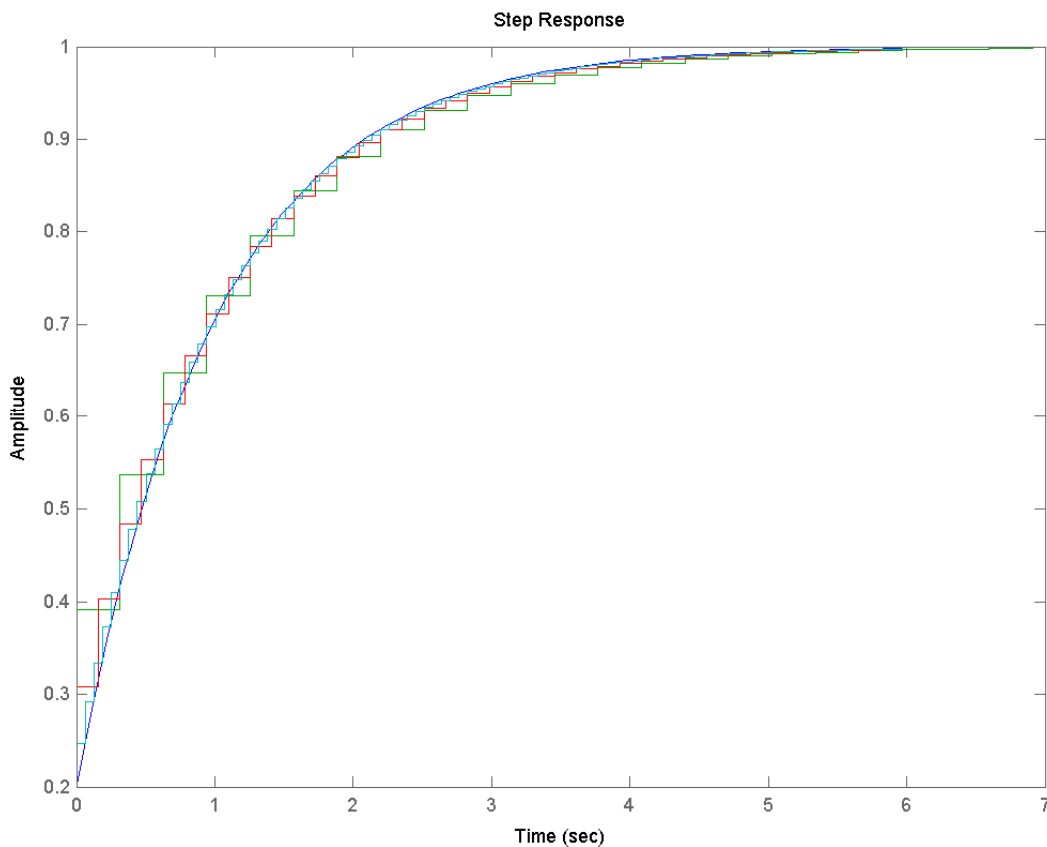


Figura 28: Risposta indiciale - differenze all'indietro

Questo tipo di discretizzazione approssima abbastanza bene la risposta indiciale della $I(s)$; all'aumentare delle pulsazioni di campionamento (il celeste rappresenta le più alte) migliora l'approssimazione del filtro.

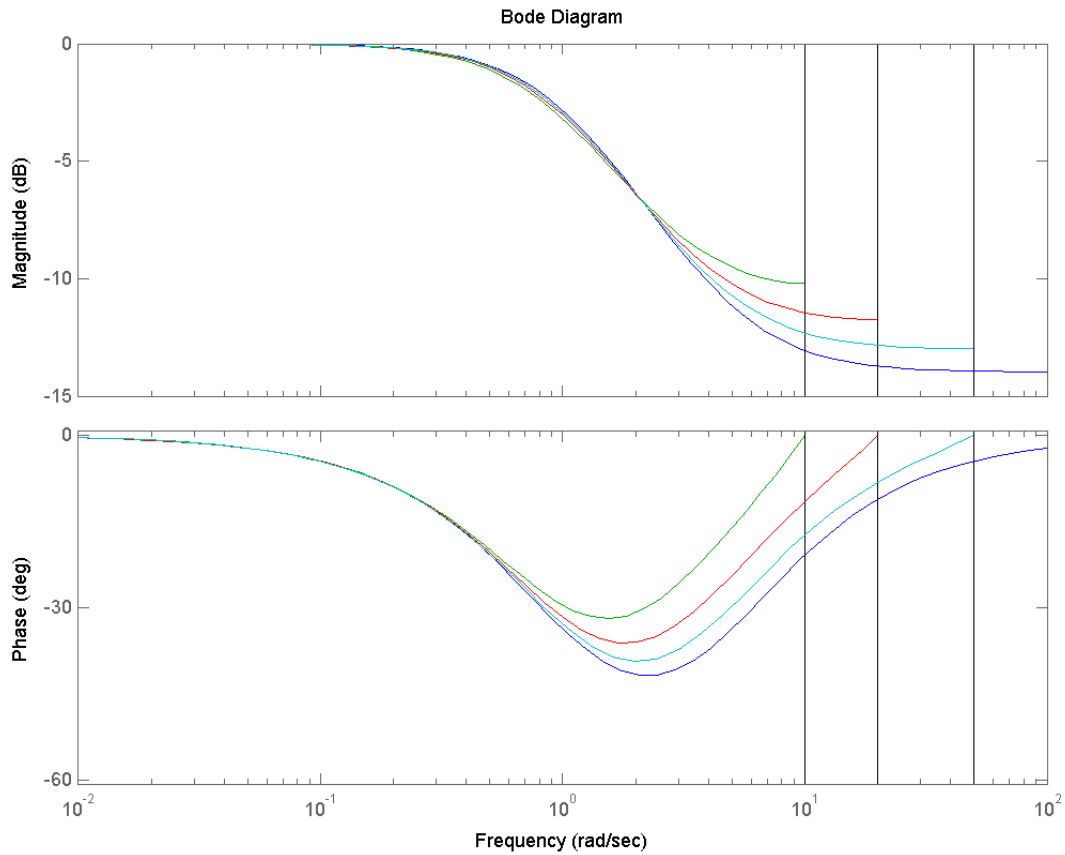


Figura 29: Risposta armonica - differenze all'indietro

Per quanto riguarda il diagramma dei moduli possiamo osservare che fino ad una frequenza di 2.5 rad/sec le tre approssimazioni si comportano nel medesimo modo della $I(s)$; per frequenze superiori invece all'aumentare delle pulsazioni migliora l'approssimazione.

Per le fasi può essere fatto un discorso analogo considerando che il punto di svolta è rappresentato da una frequenza pari a 0.65 rad/sec.

Possiamo notare che discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di sfasamento massimo:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $I(s)$
$I(s)$	-41.7	2.25	0
20 rad/sec	-31.9	1.50	9.8
40 rad/sec	-36.1	1.73	5.6
100 rad/sec	-39.2	1.94	2.5

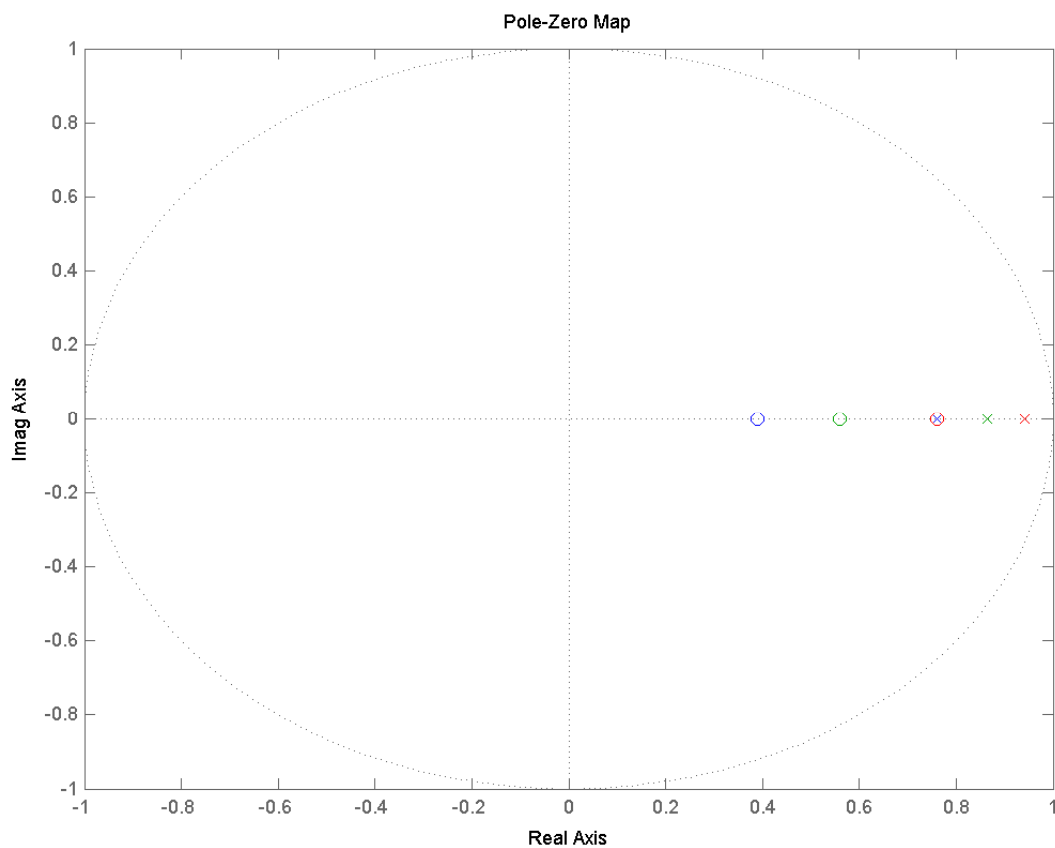


Figura 30: Stabilità - differenze all'indietro

Discretizzando con questo metodo **il filtro risulta essere stabile** poiché i poli stabili in s (quelli nel semipiano negativo) vengono mappati in poli stabili in z (compresi nella circonferenza di raggio unitario e centrata nell'origine); in particolare con tale discretizzazione sono mappati all'interno della circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e centrata in $(0, 1/2)$.

Discretizzazione con il metodo delle differenze in avanti

Tale metodo utilizza la seguente trasformazione per discretizzare il filtro analogico:

$$D(z) = D(s) \quad \left| \quad s = \frac{z - 1}{T} \right.$$

e quindi applicando la trasformazione otteniamo:

$$I(z) = \frac{0.2z + T - 0.2}{z + T - 1}$$

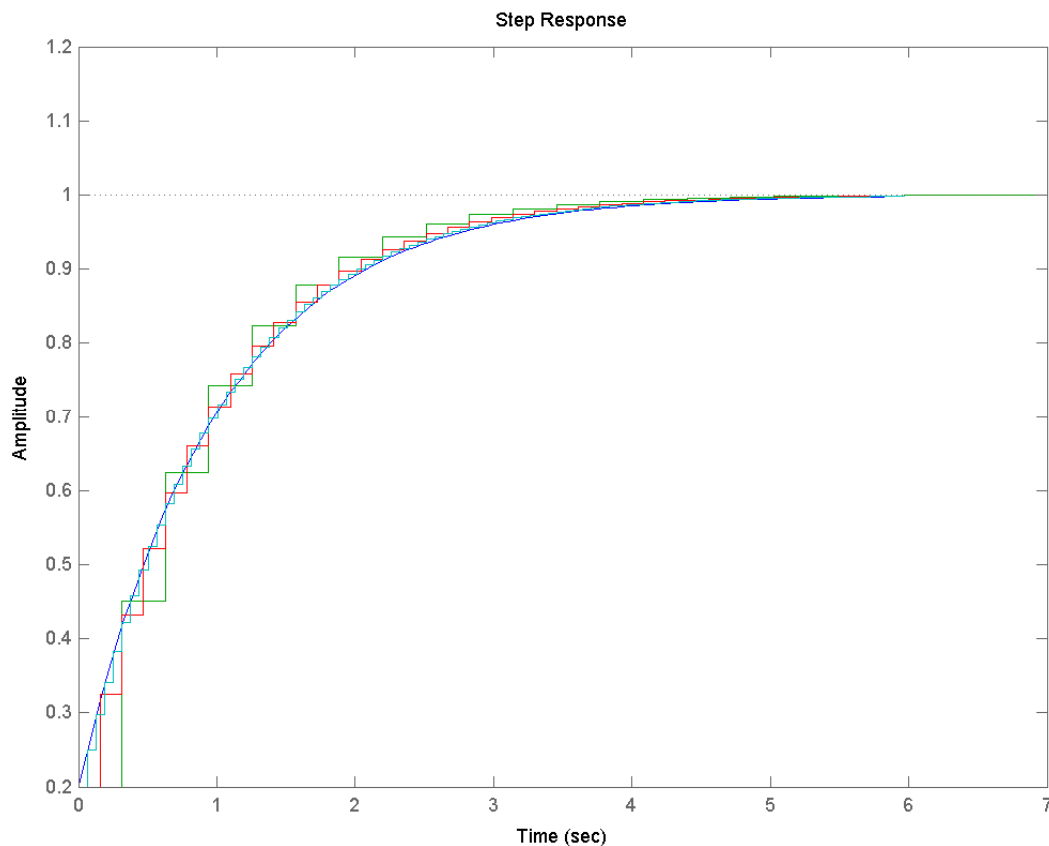


Figura 31: Risposta indiciale - differenze in avanti

Si può subito notare che anche in questo caso la funzione segue l'andamento originale e all'aumentare delle pulsazioni l'approssimazione migliora anche se non risulta essere buona come quella ottenuta discretizzando con il metodo delle differenze all'indietro.

Possiamo riscontrare una differenza con il risultato ottenuto nel filtro1, dove per pulsazioni basse l'andamento della funzione nel transitorio si discostava dalla $I(s)$.

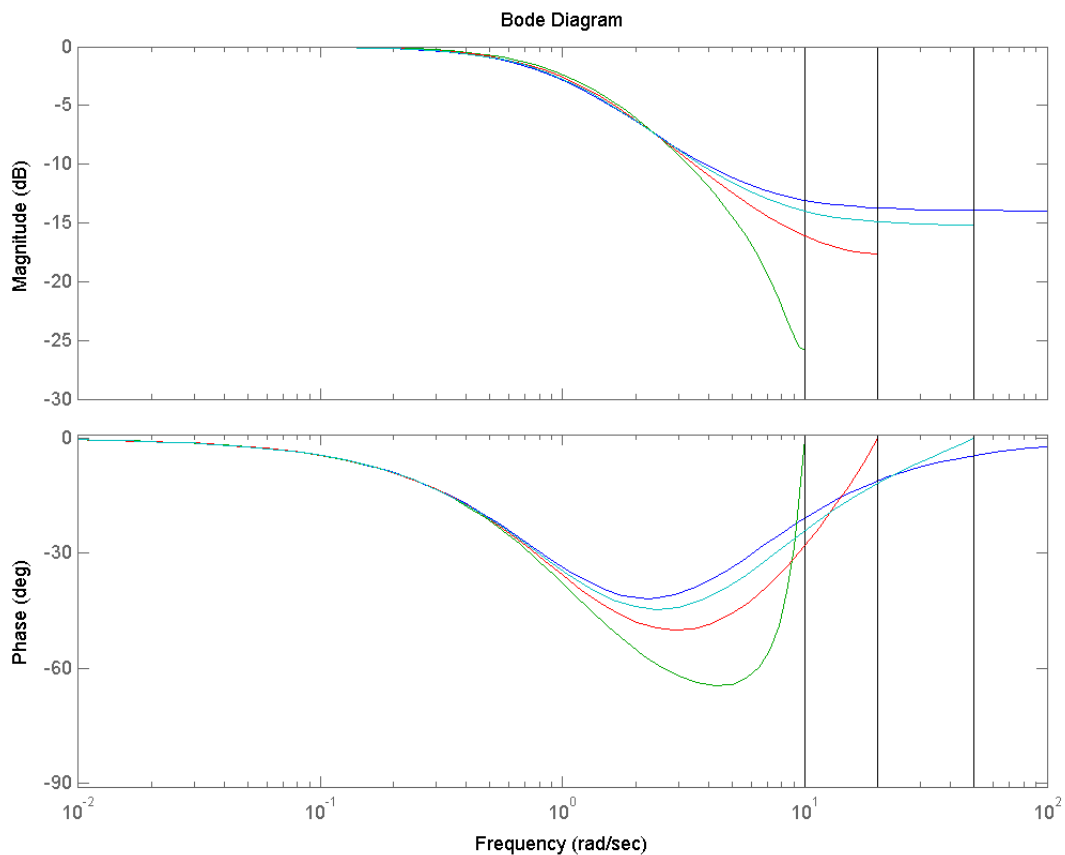


Figura 32: Risposta armonica - differenze in avanti

Per quanto riguarda il diagramma dei moduli possiamo osservare che fino ad una frequenza di 3.0 rad/sec le tre approssimazioni si comportano nel medesimo modo della $I(s)$; per frequenze superiori invece all'aumentare delle pulsazioni migliora l'approssimazione e in particolare possiamo osservare che per pulsazioni pari a 20 rad/sec (colore verde) il discostamento risulta essere più accentuato.

Per le fasi può essere fatto un discorso analogo considerando che il punto di svolta è rappresentato da una frequenza pari a 0.7 rad/sec.

Discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di sfasamento massimo:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $I(s)$
$I(s)$	-41.7	2.25	0
20 rad/sec	-64.5	4.29	-22.8
40 rad/sec	-59.1	2.91	-17.4
100 rad/sec	-44.7	2.51	-3.0

Come sopra detto possiamo notare come con pulsazioni più basse la differenza tra gli sfasamenti massimi è notevole (intorno ai 20 gradi)

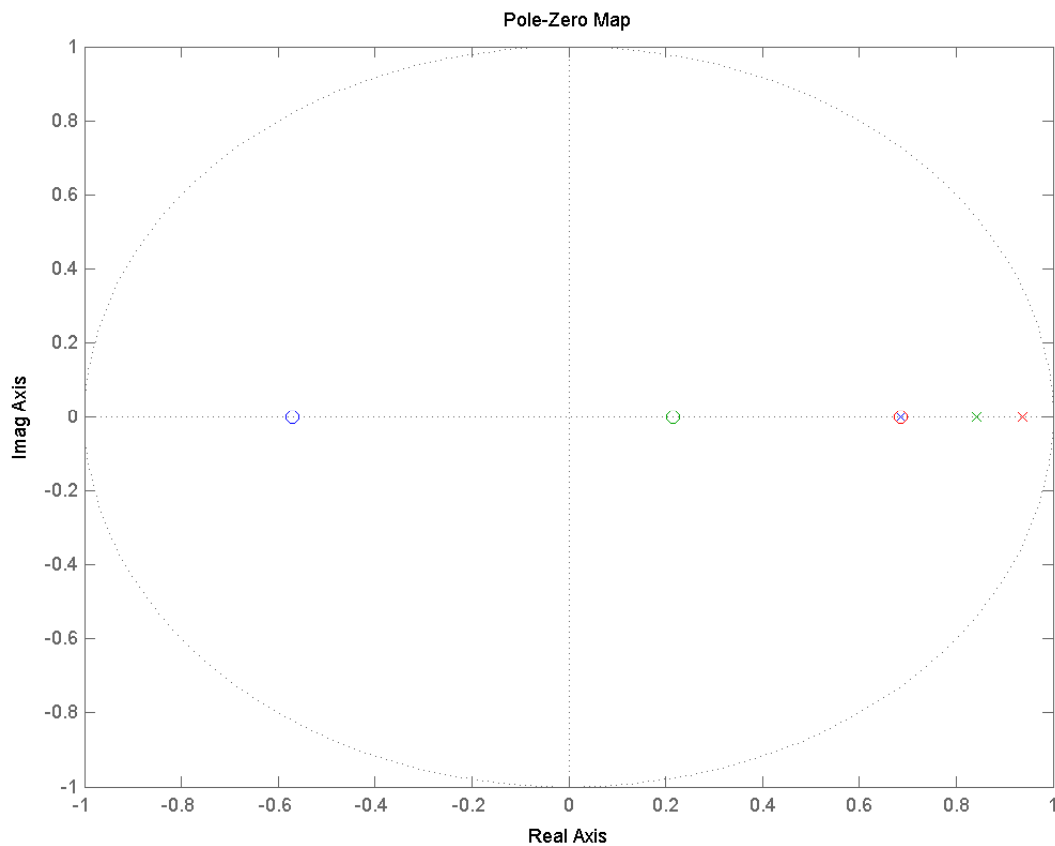


Figura 33: Stabilità - differenze in avanti

Sebbene in pratica questo metodo di discretizzazione non venga utilizzato nel controllo digitale perché può non conservare la stabilità del sistema (il semipiano negativo in s viene mappato in z nel semipiano compreso tra $]-\infty, 1]$), nel nostro caso come si può osservare dalla figura la stabilità è mantenuta (i poli sono interni al cerchio di raggio unitario e centrato nell'origine). Quindi anche in questo caso **il filtro risulta essere stabile**.

Discretizzazione con il metodo della trasformazione bilineare

Tale metodo utilizza la seguente trasformazione per discretizzare il filtro analogico:

$$D(z) = D(s) \quad \left| \quad s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right.$$

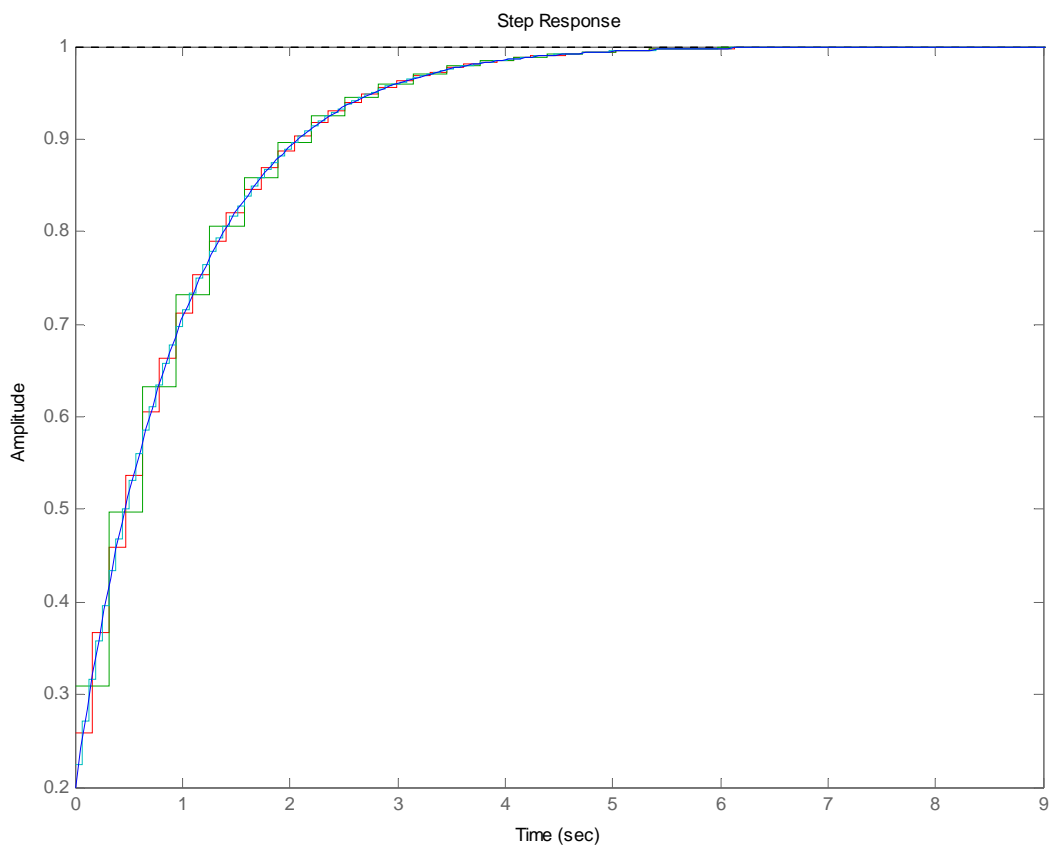


Figura 34: Risposta indiciale – trasformazione bilineare

Questo tipo di discretizzazione approssima bene la risposta indiciale della $I(s)$; all'aumentare delle pulsazioni di campionamento (il celeste rappresenta le più alte) migliora l'approssimazione del filtro. I risultati ottenuti dimostrano che questa trasformazione risulta essere una delle più utilizzate nella pratica.

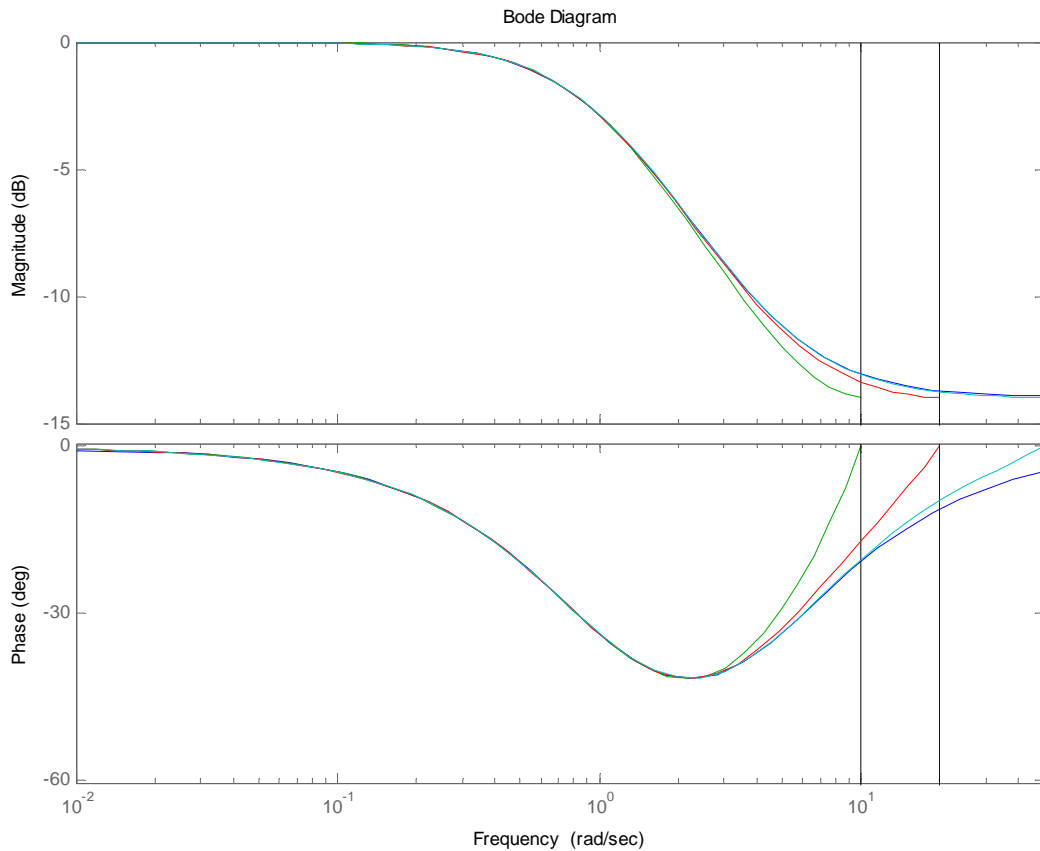


Figura 35: Risposta armonica – trasformazione bilineare

È evidente dalla figura che attraverso tale metodo sia il modulo che la fase della risposta armonica sono praticamente identiche alla $I(s)$, e l'approssimazione peggiora di poco con il diminuire delle pulsazioni di campionamento.

Discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di sfasamento massimo:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $I(s)$
$I(s)$	-41.7	2.25	0
20 rad/sec	-41.7	2.25	0
40 rad/sec	-41.7	2.25	0
100 rad/sec	-41.7	2.25	0

A conferma della “bontà” di tale tipo di discretizzazione osserviamo come non ci siano differenze di sfasamento massimo.

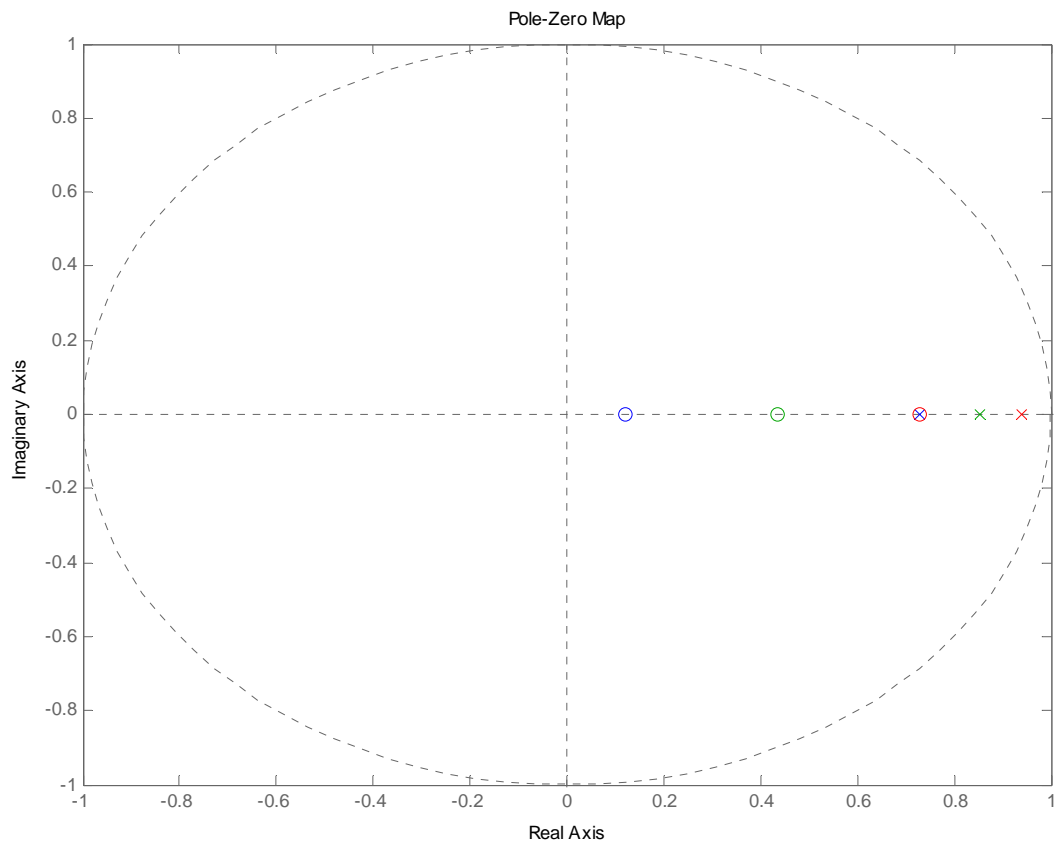


Figura 36: Stabilità – trasformazione bilineare

Discretizzando con questo metodo **il filtro risulta essere stabile** poiché i poli stabili in s (quelli nel semipiano negativo) vengono esattamente mappati in poli stabili in z (compresi nella circonferenza di raggio unitario e centrata nell'origine).

Discretizzazione con il metodo dell'invarianza all'impulso

Questo metodo di discretizzazione prevede che l'antitrasformata di Laplace della $G(s)$ calcolata per $t=KT$ sia uguale all'antitrasformata Z della $G(z)$ da cui:

$$D(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[D(s)]]$$

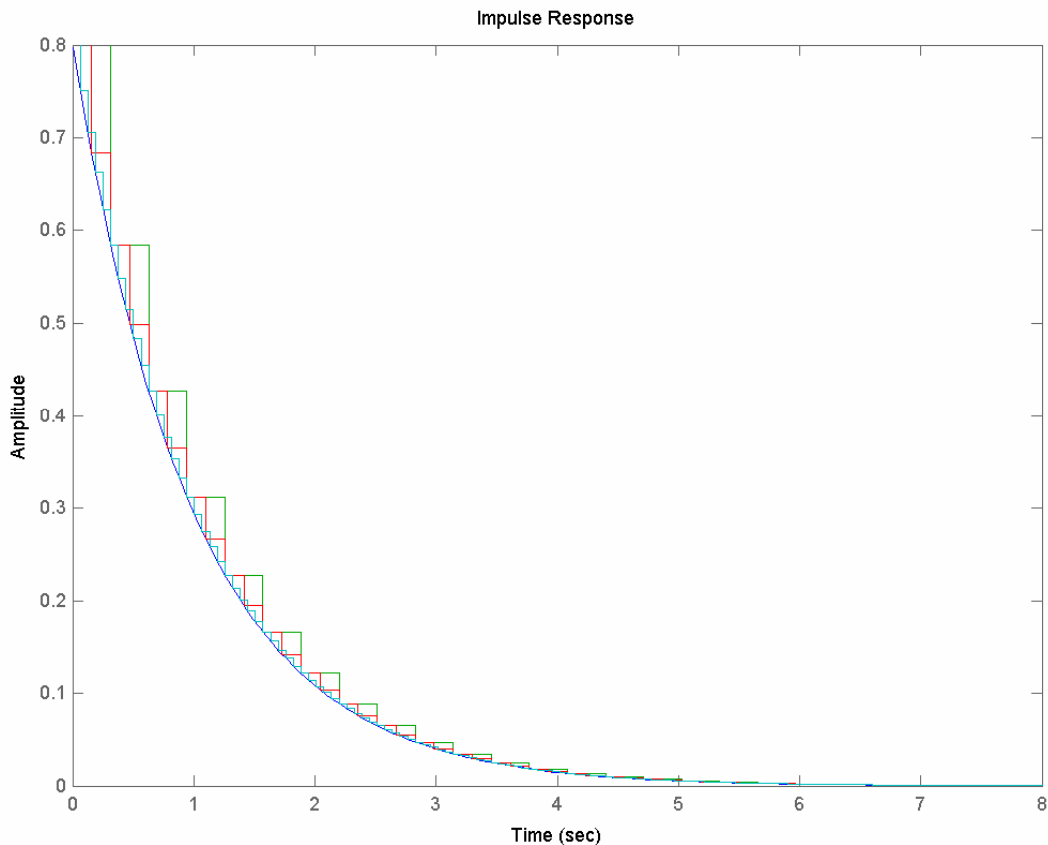


Figura 37: Risposta all'impulso – invarianza all' impulso

Poiché lo scopo di questo metodo di discretizzazione è quello di approssimare la risposta all'impulso del sistema si può subito notare che effettivamente i filtri discretizzati seguono l'andamento di quello analogico. All'aumentare delle pulsazioni di campionamento migliora l'approssimazione del filtro.

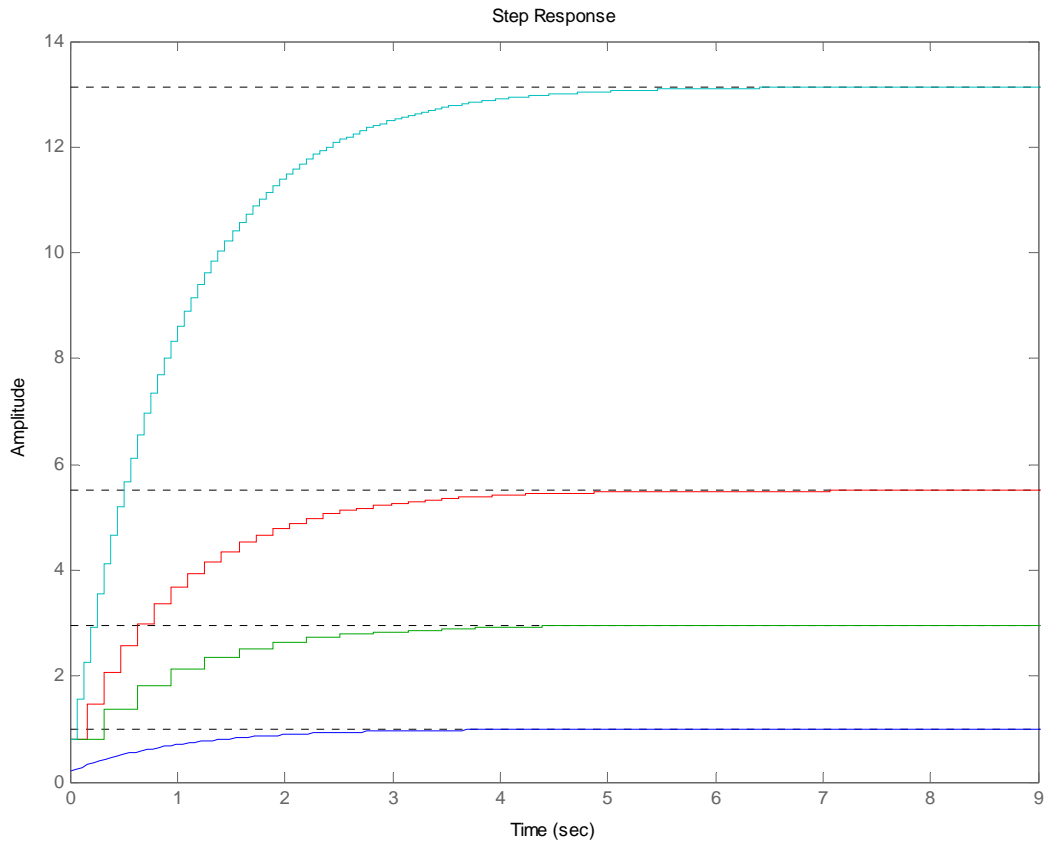


Figura 378: Risposta indiciale – invarianza all'impulso

Per quanto riguarda invece le risposte dei filtri con in ingresso un gradino si evince a prima vista il discostamento dalla risposta del filtro analogico. La motivazione deriva dal fatto che tale metodo è stato studiato per approssimare le risposte agli impulsi e quindi risulta ovvio che per ingressi diversi il comportamento non seguirà quello previsto.

Discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di assestamento a regime:

Valore delle pulsazioni	Assestamento a regime	Differenze di assestamento a regime con la I(s)
I(s)	1	0
20 rad/sec	3	2
40 rad/sec	5.7	4.7
100 rad/sec	13	12

All'aumentare delle pulsazioni di campionamento l'andamento della $G(z)$ si discosta sempre di più da quello della $I(s)$.

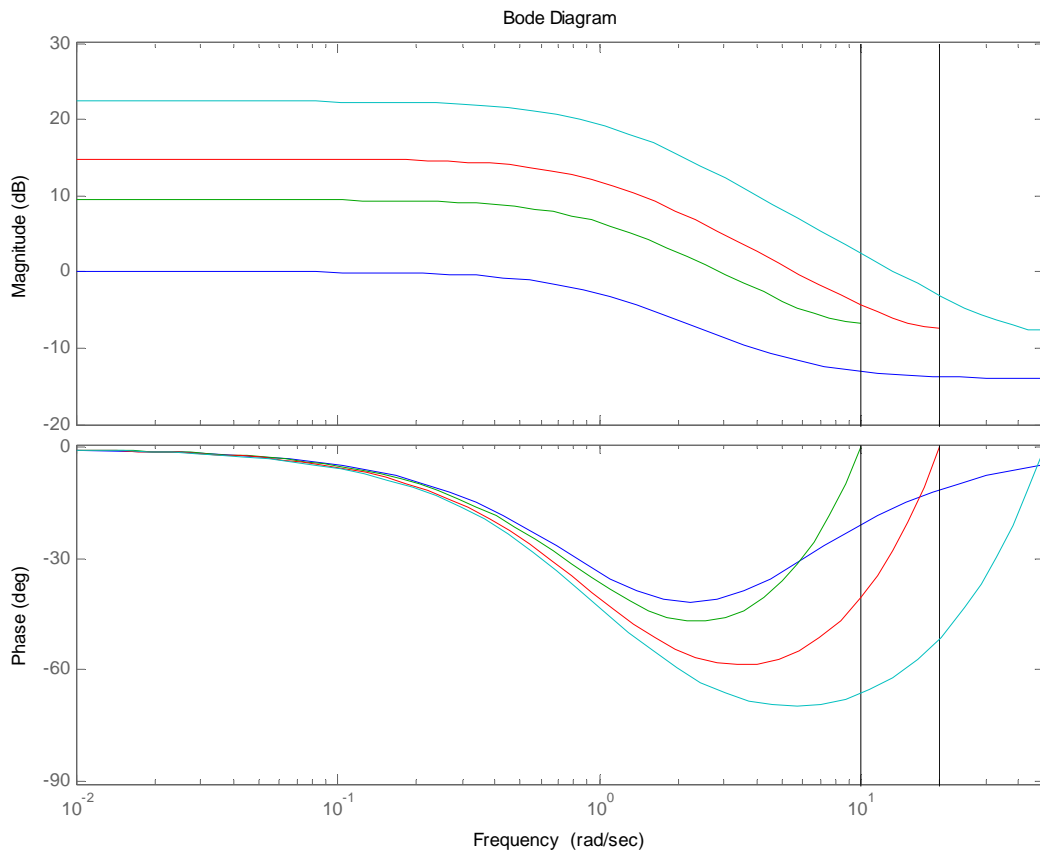


Figura 389: Risposta armonica – invarianza all'impulso

In questo diagramma si nota come i sistemi discretizzati si comportino in maniera totalmente diversa dal filtro analogico. Non ha senso quindi effettuare le solite analisi.

Possiamo notare, a differenza del filtro precedente, che l'influenza dell'aliasing è minore a causa del fatto che questa rete è limitata in banda.

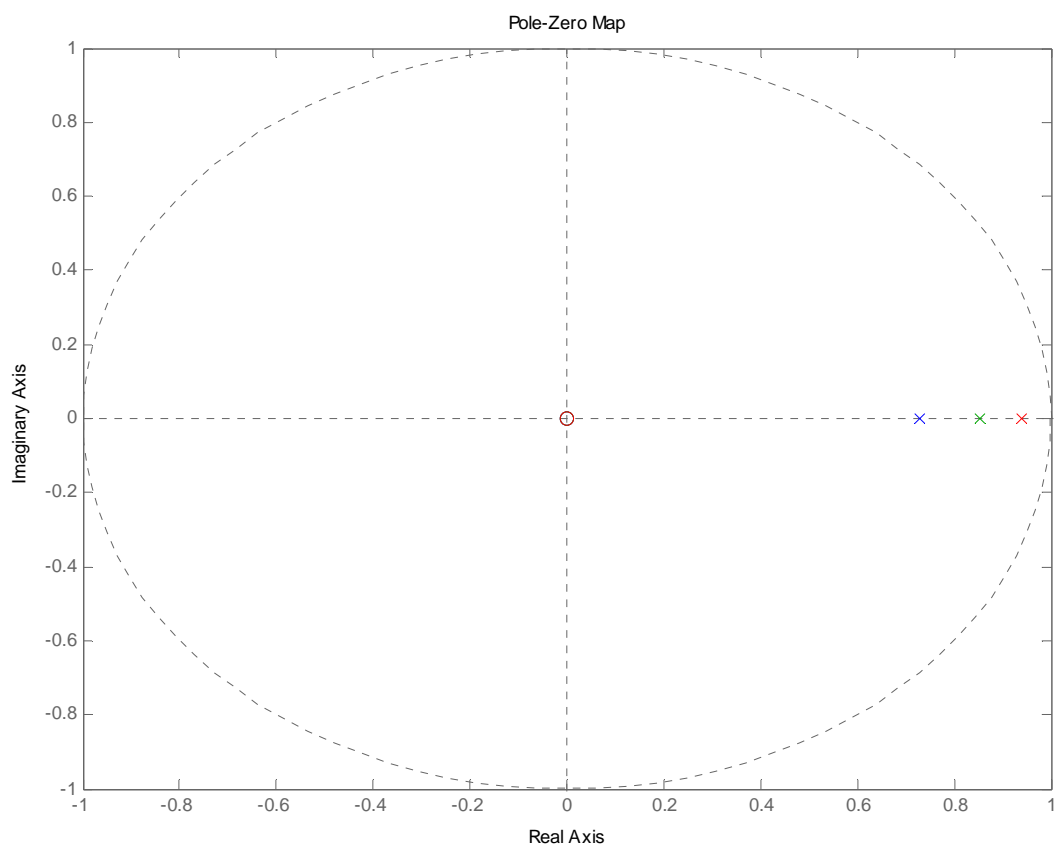


Figura 40: Stabilità – invarianza all'impulso

Come noto dalla teoria, questo tipo di discretizzazione mappa sistemi stabili in s in sistemi stabili in z

Discretizzazione con il metodo dell'invarianza al gradino

Questo metodo di discretizzazione prevede che l'antitrasformata di Laplace della risposta al gradino della $G(s)$ calcolata per $t=KT$ sia uguale all'antitrasformata Z della risposta al gradino delle $I(z)$ da cui:

$$D(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} D(s) \right]$$

Questa relazione mette in evidenza che per ottenere la $G(z)$ si deve effettuare la Z-trasformata della $G(s)$ in cascata ad un ricostruttore di ordine 0.

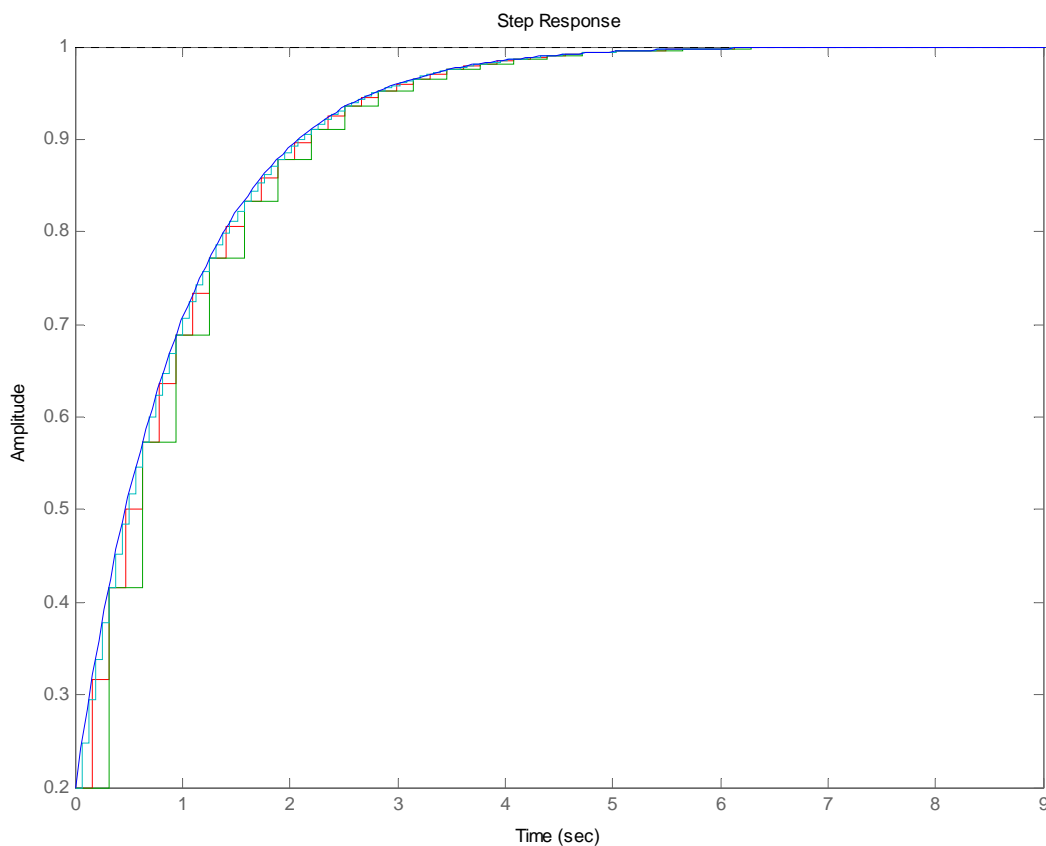


Figura 391: Risposta indiciale - invarianza al gradino

Le risposte al gradino dei filtri discreti risultano approssimare abbastanza fedelmente l'andamento della $I(s)$, anche perché l'obiettivo di tale metodo di discretizzazione risulta essere proprio questo. Si nota come all'aumentare delle frequenze migliora l'approssimazione.

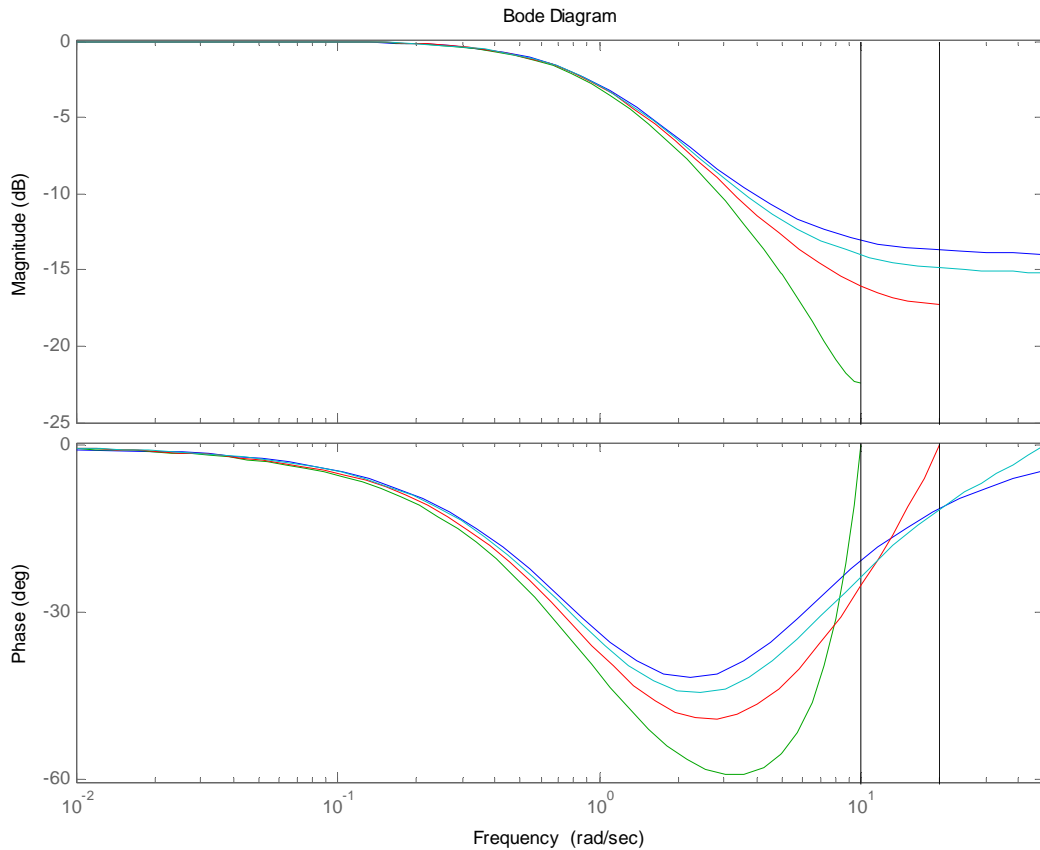


Figura 402: Risposta armonica - invarianza al gradino

A differenza del metodo precedente non si riscontrano problemi di aliasing in quanto la presenza del ricostruttore fittizio di ordine zero introduce un effetto di filtraggio.

Per quanto riguarda il diagramma dei moduli possiamo osservare che per frequenze minori di 1 gli andamenti sono identici, per quelle maggiori di 1 all'aumentare delle frequenze di campionamento migliora l'approssimazione del modulo della risposta armonica; per le fasi può essere fatto un discorso analogo.

Discretizzando con pulsazioni diverse otteniamo i seguenti valori di sfasamento massimo:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con I(s)
I(s)	-41.7	2.25	0
20 rad/sec	-59.2	3.46	-17.5
40 rad/sec	-49.2	2.8	-7.5
100 rad/sec	-44.5	2.4	-2.8

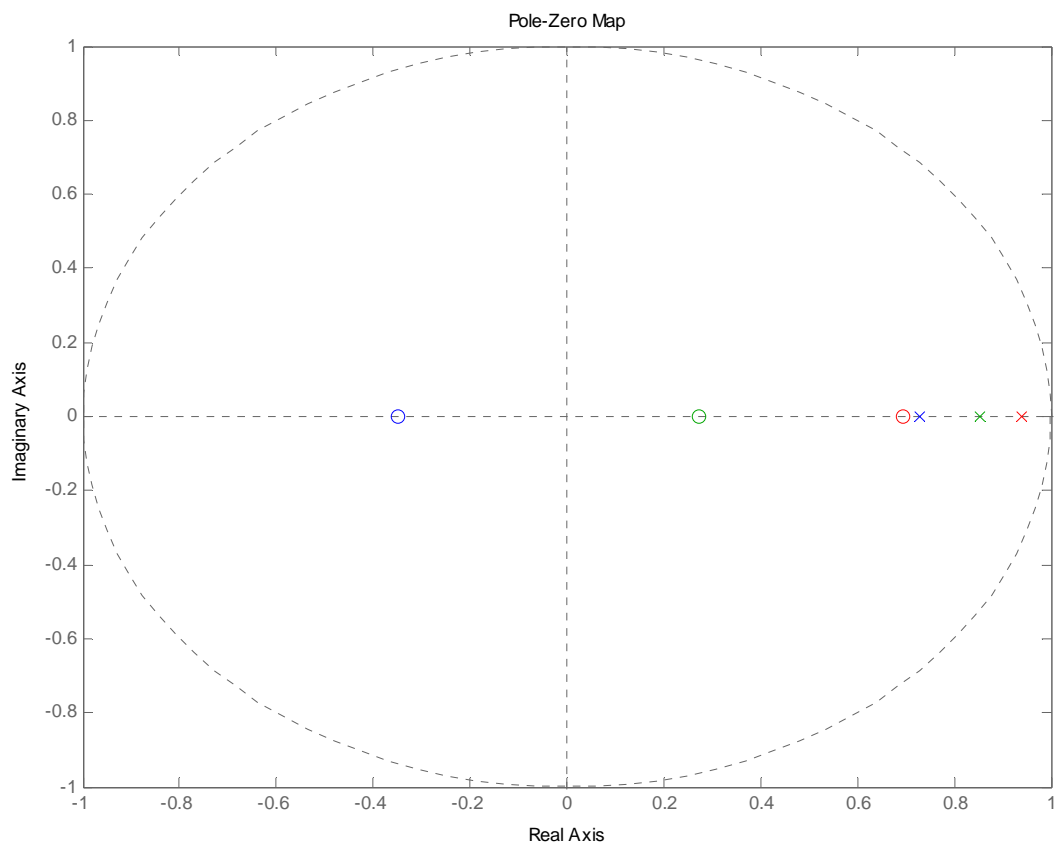


Figura 413: Stabilità - invarianza al gradino

Come noto dalla teoria, questo tipo di discretizzazione mappa sistemi stabili in s in sistemi stabili in z .

Discretizzazione con il metodo della corrispondenza poli-zeri

Con questo metodo, ogni polo e zero in s della $I(s)$ viene trasformato in un polo o zero in z mediante le relazioni:

$$(s + a) \rightarrow (1 - e^{-aT} z^{-1})$$

$$(s + a \pm jb) \rightarrow (1 - 2e^{-aT} \cos bT z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2})$$

Dopo l'applicazione di queste relazioni, vengono introdotti nella $I(z)$ tanti zeri in $z=-1$ quanti sono i poli di $I(s)$ in eccesso rispetto agli zeri, meno uno (convenzione utilizzata da Matlab).

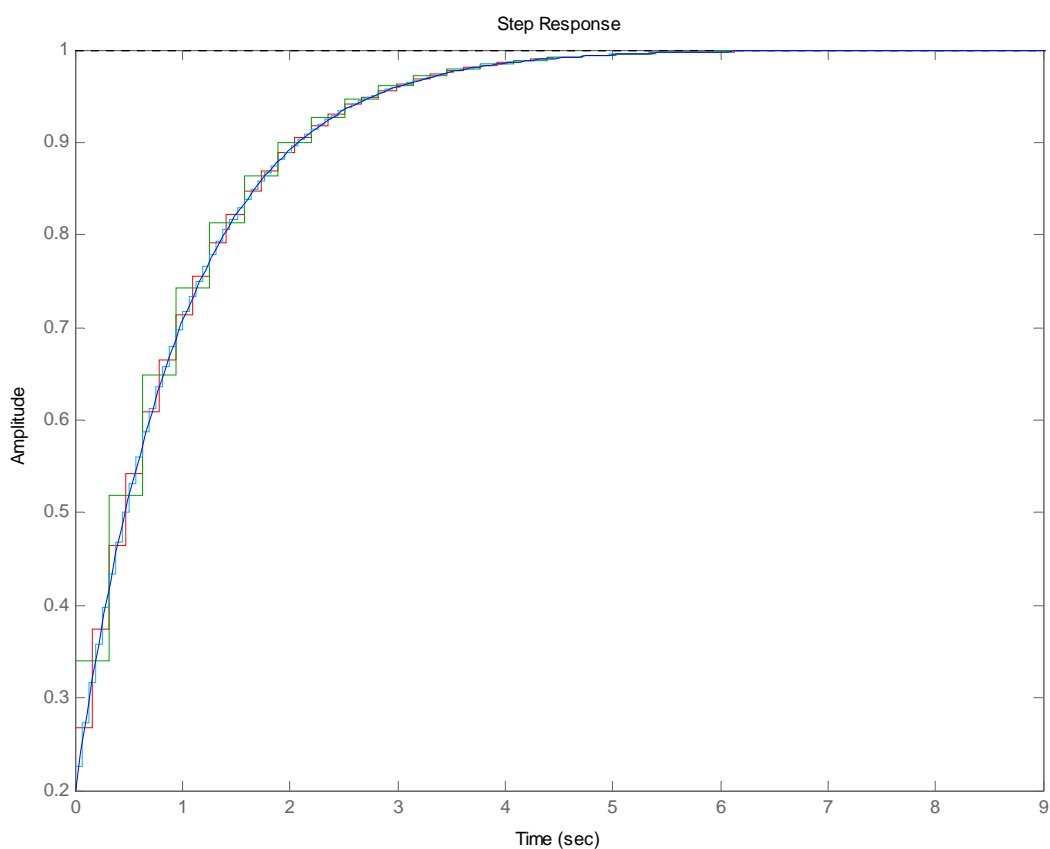


Figura 424: Risposta indiciale - corrispondenza poli-zeri

Questo tipo di discretizzazione approssima bene la risposta indiciale della $I(s)$; all'aumentare delle pulsazioni di campionamento (il celeste rappresenta le più alte) migliora l'approssimazione del filtro.

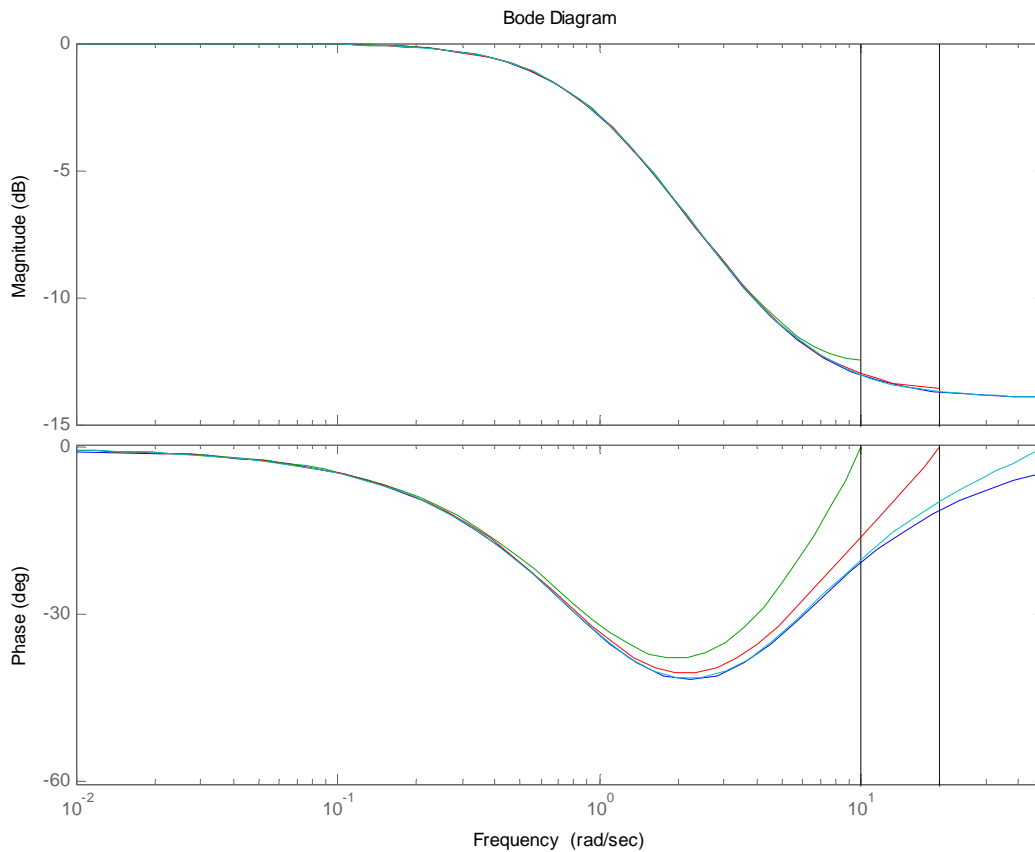


Figura 435: Risposta armonica - corrispondenza poli-zeri

Si può subito notare dalla figura che attraverso tale metodo sia il modulo è praticamente identico a quello della $I(s)$.

Per le fasi la differenza è minima ma comunque esistente:

Valore delle pulsazioni	Sfasamento massimo	Frequenza	Differenze di sfasamento massimo con $I(s)$
$I(s)$	-41.7	2.25	0
20 rad/sec	-37.9	2.0	3.8
40 rad/sec	-40.7	2.22	1
100 rad/sec	-41.5	2.25	0.2

Come sopra detto possiamo notare come gli sfasamenti massimi della funzione analogica e di quelle discretizzate siano molto simili, a conferma della “bontà” di tale tipo di discretizzazione.

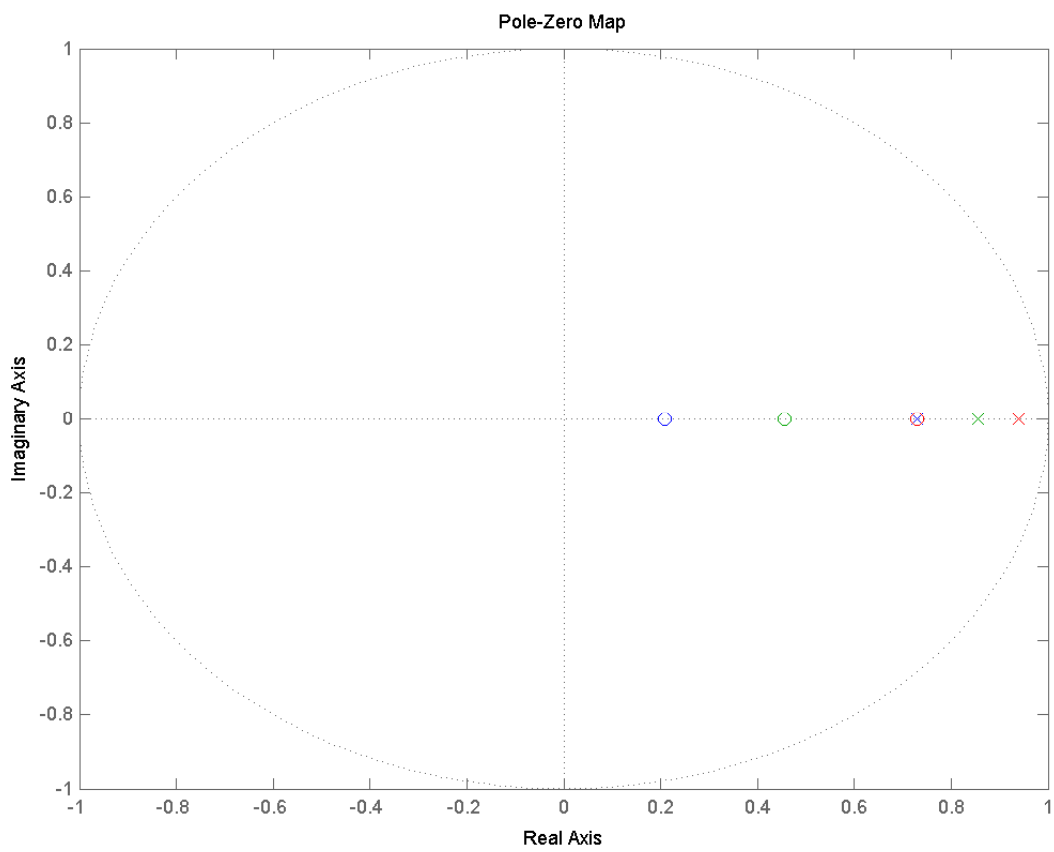


Figura 446: Stabilità - corrispondenza poli-zeri

Questo tipo di discretizzazione trasforma sistemi stabili in s in sistemi stabili in z .

Conclusioni

Alla luce dei risultati ottenuti abbiamo messo a confronto i due metodi di discretizzazione che approssimano meglio il filtro analogico:

- **Blu:** $I(s)$
- **Verde:** $I(z)$ con Tustin e $\omega_s = 100$ rad/sec
- **Rosso:** $I(z)$ con Corrispondenza Poli-Zeri e $\omega_s = 100$ rad/sec

I due metodi approssimano la $I(s)$ in maniera praticamente identica tra loro e a conferma di quanto noto dalla teoria sono effettivamente quelli migliori e quindi i più utilizzati nella pratica.

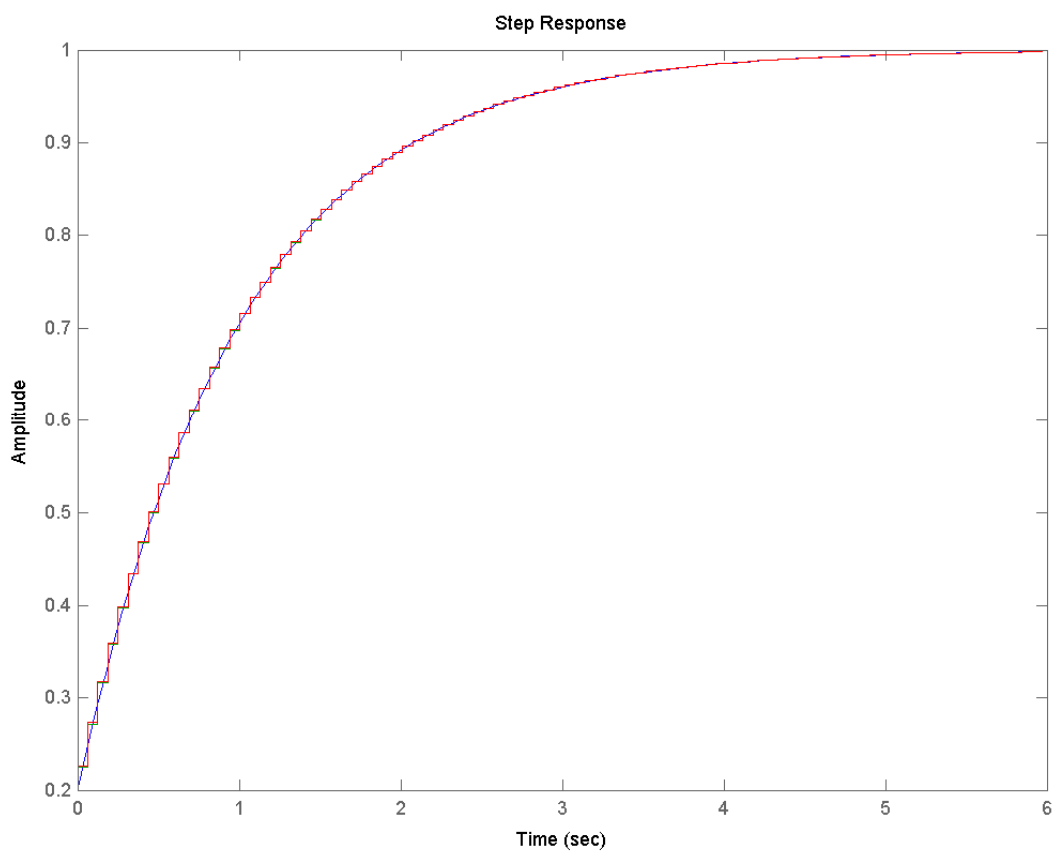


Figura 47: Conclusioni - risposta indiciale

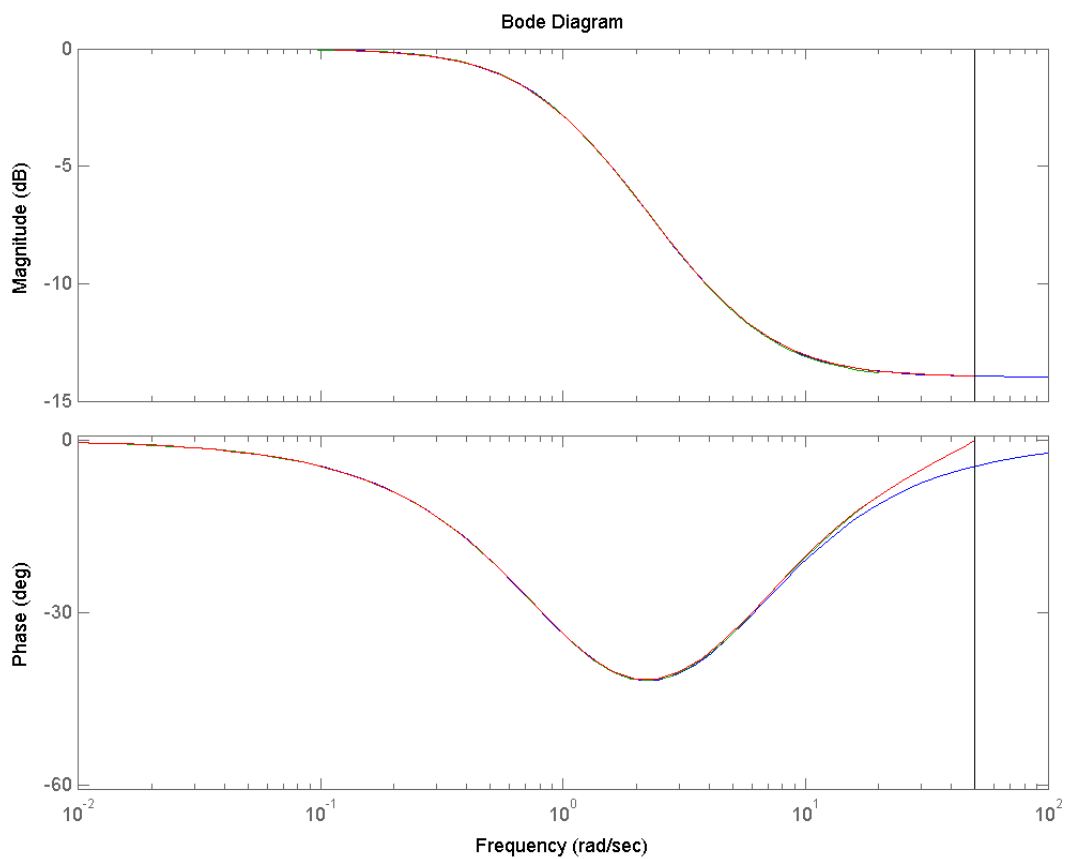


Figura 458: Conclusioni – risposta armonica

Anche per i diagrammi di bode, sia per il modulo che per la fase, valgono le stesse considerazioni.